# Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

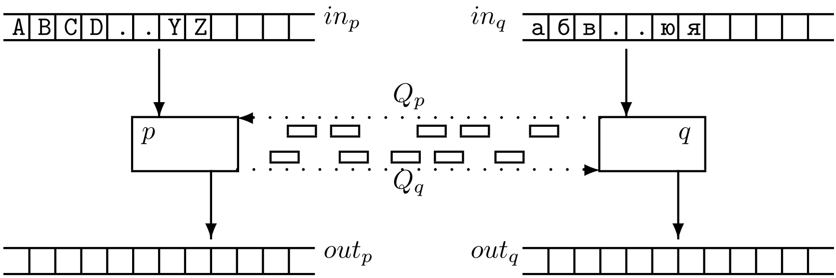
Блок 11

Живость
симметричного протокола раздвижного окна

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

# Напоминание




Живость BSWP(k) для каждого номера $k$ блоков данных, $k \in \mathbb{N}_0$:
в любом вычислении содержится конфигурация, в которой
все значения $out_p[0], \ldots, out_p[k], out_q[0], \ldots, out_q[k]$ отличны от $\perp$

$$\forall \pi \in \Pi(S) : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\} : out_p[i] \neq \perp \,\&\, out_q \neq \perp$$

# Напоминание

- $\ell_p : \mathbb{N}_0 = 0$
- $r_p : \mathbb{N}_0 = 0$
- $in_p : ARR[\mathcal{T}]$
- $out_p : ARR[\mathcal{T}] = (\bot, \bot, \bot, \ldots);$

**Действие S$_p$:** $\{\ell_p < r_p + \mathfrak{c}_p\}$

1. Выбрать $i \in \mathbb{N}_0$: $\ell_p \leq i < r_p + \mathfrak{c}_p$
2. $send(\textbf{pack}, in_p[i], i)$

**Действие R$_p$:** {очередь $Q_p$ непуста}

1. $receive(\underline{\textbf{pack}}, w, i)$
2. Если $out_p[i] = \bot$:
   - 2.1 $out_p[i] := w;$
   - 2.2 $\ell_p := \max(\ell_p, i - \mathfrak{c}_q + 1);$
   - 2.3 $r_p := \min(j \mid out_p[j] = \bot);$

**Действие L$_p$** {очередь $Q_p$ непуста}

1. $receive(\underline{\textbf{pack}}, w, i)$

К сожалению, если не наложить на устройство и выполнения BSWP дополнительных ограничений, то он не будет обладать свойством живости

**Ограничения на устройство протокола**:

- Все элементы $in_p$ и $in_q$ отличны от $\perp$
- $\mathfrak{c}_p, \mathfrak{c}_q \in \mathbb{N}_0$ и $\mathfrak{c}_p + \mathfrak{c}_q > 0$

**Ограничения справедливости**:

F1 Если бесконечно часто возникает возможность отправки пакета, то этот пакет будет отправляться бесконечно часто

F2 Если пакет отправляется бесконечно часто, то он и принимается бесконечно часто

BSWP с этими ограничениями будем обозначать BSWP*

Оказывается, что этих ограничений достаточно для обеспечения живости протокола

**Лемма (об узости окна). В любой достижимой конфигурации BSWP* верно:**

$$r_p - \mathfrak{c}_q \leq \ell_p \leq r_q \leq \ell_q + \mathfrak{c}_p \leq r_p + \mathfrak{c}_p$$

Доказательство.

По теореме о безопасности инварианта, любая достижимая конфигурация BSWP* обладает свойством $P_{BSWP}$

Неравенство $r_p - \mathfrak{c}_q \leq \ell_p$ следует из

- $p^0$: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_p - 1\} : out_p[i] \neq \perp$
- $p^2$: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \neq \perp \Rightarrow out_p[i] = in_q[i] \,\&(\ell_p > i - \mathfrak{c}_q)$

Неравенство $\ell_p \leq r_q$ — это $p^3$

Неравенство $r_q \leq \ell_q + \mathfrak{c}_p$ (то есть $r_q - \mathfrak{c}_p \leq \ell_q$) следует из $q^0$ и $q^2$

Неравенство $\ell_q + \mathfrak{c}_p \leq r_p + \mathfrak{c}_p$ (то есть $\ell_q \leq r_p$) — это $q^3$ ▼

Таким образом, значения $r_q$ и $\ell_q + \mathfrak{c}_p$, задающие створки окна узла $q$ отстоят друг от друга не более чем на $\mathfrak{c}_p + \mathfrak{c}_q$ (и аналогично для $p$)

**Лемма (об открытости окна). В любой достижимой конфигурации BSWP* выполнено хотя бы одно из предусловий действий отправки пакета $\mathbf{S}_p$ $(\ell_p < r_p + \mathfrak{c}_p)$, $\mathbf{S}_q$ $(\ell_q < r_q + \mathfrak{c}_q)$**

Доказательство.

По лемме об узости окна, верны неравенства

$$r_p - \mathfrak{c}_q \leq \ell_p \leq r_q \leq \ell_q + \mathfrak{c}_p \leq r_p + \mathfrak{c}_p$$

В частности, это означает, что $\ell_p \leq r_q$ и $\ell_q + \mathfrak{c}_p \leq r_p + \mathfrak{c}_p$

То есть $\ell_p \leq r_q$ и $\ell_q \leq r_p$

Кроме того, согласно ограничению $\mathfrak{c}_p + \mathfrak{c}_q > 0$, верно $r_p - \mathfrak{c}_q < r_p + \mathfrak{c}_p$

Следовательно, хотя бы одно из неравенств леммы об узости окна является строгим

Последнее означает, в частности, что $r_p - \mathfrak{c}_q < r_q \vee r_q < r_p + \mathfrak{c}_p$

То есть $r_p < r_q + \mathfrak{c}_q \vee r_q < r_p + \mathfrak{c}_p$

Следовательно, верно $\ell_p \leq r_q < r_p + \mathfrak{c}_p \vee \ell_q \leq r_p < r_q + \mathfrak{c}_q$ ▼

**Теорема (живость BSWP). С.п. $S$ BSWP* в условиях справедливости (F1) и (F2) обладает свойством живости BSWP**

$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \forall \pi \in \Pi(S) : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\} : out_p[i] \neq \perp \,\&\, out_q \neq \perp$

Доказательство.

Согласно $p^0$ ($\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_p - 1\} : out_p[i] \neq \perp$), $q^0$ ($\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_q - 1\} : out_q[i] \neq \perp$) и безопасности BSWP, достаточно показать, что каждое из значений $r_p$, $r_q$ увеличивается бесконечно часто

*Предположим от противного*, что это не так

По лемме об узости окна, верны неравенства $r_p - \mathfrak{c}_q \leq r_q \leq r_p + \mathfrak{c}_p$ и $r_q - \mathfrak{c}_p \leq r_p \leq r_q + \mathfrak{c}_q$, а значит, значения обеих переменных $r_p$, $r_q$ увеличиваются лишь конечное число раз

Пусть $k_p$, $k_q$ — наибольшие значения $r_p$ и $r_q$ соответственно

**Теорема (живость BSWP). С.п. $S$ BSWP* в условиях справедливости (F1) и (F2) обладает свойством живости BSWP**
$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \forall \pi \in \Pi(S) : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\} : out_p[i] \neq \bot \,\&\, out_q \neq \bot$

Доказательство.

По лемме об открытости окна, бесконечно часто допустимо действие отправления хотя бы одного из пакетов $(\textbf{pack}, in_p[k_q], k_q)$, $(\textbf{pack}, in_q[k_p], k_p)$

Пусть, для ясности, это пакет $(\textbf{pack}, in_q[k_p], k_p)$

Согласно (F1), этот пакет отправляется бесконечно часто

Согласно (F2), этот пакет принимается бесконечно часто

По устройству протокола и ограничению $in_q[k_p] \neq \bot$, приём этого сообщения приводит к увеличению значения $r_p$ (*противоречие*) ▼

**Д.з. 1.** Покажите, что последняя теорема перестаёт быть верной, если убрать хотя бы одно из ограничений (F1), (F2), и для этого приведите соответствующие «неживые» сценарии выполнения протокола

**Д.з. 2.** Докажите, что если в BSWP* выполняется равенство $\mathfrak{c}_p + \mathfrak{c}_q = 1$ и начальные значения $\ell_p$ и $\ell_q$ заменить соответственно на $-\mathfrak{c}_q$ и $-\mathfrak{c}_p$, то во всех достижимых конфигурациях будут выполняться равенства $\ell_p + \mathfrak{c}_q = r_p$ и $\ell_q + \mathfrak{c}_p = r_q$