Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

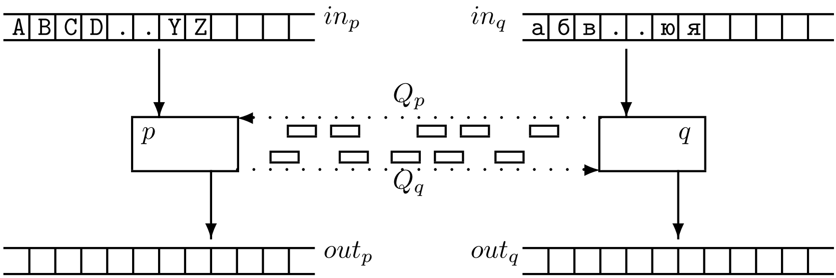
Блок 11

Живость
симметричного протокола раздвижного окна

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, весенний семестр

Напоминание



Живость BSWP(k) для каждого номера k блоков данных, $k \in \mathbb{N}_0$:
в любом вычислении содержится конфигурация, в которой
все значения $out_p[0], \ldots, out_p[k], out_q[0], \ldots, out_q[k]$ отличны от $\perp$

$$\forall \pi \in \Pi(S) : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\} : out_p[i] \neq \perp \,\&\, out_q \neq \perp$$

Напоминание

- $\ell_p : \mathbb{N}_0 = 0$
- $r_p : \mathbb{N}_0 = 0$
- $in_p : ARR[\mathcal{T}]$
- $out_p : ARR[\mathcal{T}] = (\bot, \bot, \bot, \dots);$

Действие $\mathbf{S}_p$: $\{\ell_p < r_p + \mathfrak{c}_p\}$

1. Выбрать $i \in \mathbb{N}_0$: $\ell_p \le i < r_p + \mathfrak{c}_p$
2. $send(\mathbf{pack}, in_p[i], i)$

Действие $\mathbf{R}_p$: $\{$очередь Q_p непуста$\}$

1. $receive(\underline{\mathbf{pack}}, w, i)$
2. Если $out_p[i] = \bot$:
   2.1 $out_p[i] := w;$
   2.2 $\ell_p := \max(\ell_p, i - \mathfrak{c}_q + 1);$
   2.3 $r_p := \min(j \mid out_p[j] = \bot);$

Действие $\mathbf{L}_p$ $\{$очередь Q_p непуста$\}$

1. $receive(\underline{\mathbf{pack}}, w, i)$

К сожалению, если не наложить на устройство и выполнения BSWP дополнительных ограничений, то он не будет обладать свойством живости

Ограничения на устройство протокола:

- Все элементы in_p и in_q отличны от $\perp$
- $\mathfrak{c}_p, \mathfrak{c}_q \in \mathbb{N}_0$ и $\mathfrak{c}_p + \mathfrak{c}_q > 0$

Ограничения справедливости:

F1 Если бесконечно часто возникает возможность отправки пакета, то этот пакет будет отправляться бесконечно часто

F2 Если пакет отправляется бесконечно часто, то он и принимается бесконечно часто

BSWP с этими ограничениями будем обозначать BSWP*

Оказывается, что этих ограничений достаточно для обеспечения живости протокола

Лемма (об узости окна). **В любой достижимой конфигурации BSWP* верно:**

$$r_p - \mathfrak{c}_q \le \ell_p \le r_q \le \ell_q + \mathfrak{c}_p \le r_p + \mathfrak{c}_p$$

Доказательство.

По теореме о безопасности инварианта, любая достижимая конфигурация BSWP* обладает свойством P_{BSWP}

Неравенство $r_p - \mathfrak{c}_q \le \ell_p$ следует из

- p^0: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_p - 1\} : out_p[i] \ne \perp$
- p^2: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \ne \perp \Rightarrow out_p[i] = in_q[i] \,\&(\ell_p > i - \mathfrak{c}_q)$

Неравенство $\ell_p \le r_q$ — это p^3

Неравенство $r_q \le \ell_q + \mathfrak{c}_p$ (то есть $r_q - \mathfrak{c}_p \le \ell_q$) следует из q^0 и q^2

Неравенство $\ell_q + \mathfrak{c}_p \le r_p + \mathfrak{c}_p$ (то есть $\ell_q \le r_p$) — это q^3 ▼

Таким образом, значения r_q и $\ell_q + \mathfrak{c}_p$, задающие створки окна узла q отстоят друг от друга не более чем на $\mathfrak{c}_p + \mathfrak{c}_q$ (и аналогично для p)

Лемма (об открытости окна). В любой достижимой конфигурации BSWP* выполнено хотя бы одно из предусловий действий отправки пакета $\mathbf{S}_p$ $(\ell_p < r_p + \mathfrak{c}_p)$, $\mathbf{S}_q$ $(\ell_q < r_q + \mathfrak{c}_q)$

Доказательство.

По лемме об узости окна, верны неравенства

$$r_p - \mathfrak{c}_q \leq \ell_p \leq r_q \leq \ell_q + \mathfrak{c}_p \leq r_p + \mathfrak{c}_p$$

В частности, это означает, что $\ell_p \leq r_q$ и $\ell_q + \mathfrak{c}_p \leq r_p + \mathfrak{c}_p$

То есть $\ell_p \leq r_q$ и $\ell_q \leq r_p$

Кроме того, согласно ограничению $\mathfrak{c}_p + \mathfrak{c}_q > 0$, верно $r_p - \mathfrak{c}_q < r_p + \mathfrak{c}_p$

Следовательно, хотя бы одно из неравенств леммы об узости окна является строгим

Последнее означает, в частности, что $r_p - \mathfrak{c}_q < r_q \vee r_q < r_p + \mathfrak{c}_p$

То есть $r_p < r_q + \mathfrak{c}_q \vee r_q < r_p + \mathfrak{c}_p$

Следовательно, верно $\ell_p \leq r_q < r_p + \mathfrak{c}_p \vee \ell_q \leq r_p < r_q + \mathfrak{c}_q$ ▼

Теорема (живость BSWP). С.п. S BSWP* в условиях справедливости (F1) и (F2) обладает свойством живости BSWP
$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \forall \pi \in \Pi(S) : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\} : out_p[i] \neq \bot \,\&\, out_q \neq \bot$
Доказательство.

Согласно p^0 ($\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_p - 1\} : out_p[i] \neq \bot$), q^0 ($\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_q - 1\} : out_q[i] \neq \bot$) и безопасности BSWP, достаточно показать, что каждое из значений r_p, r_q увеличивается бесконечно часто

Предположим от противного, что это не так

По лемме об узости окна, верны неравенства $r_p - \mathfrak{c}_q \leq r_q \leq r_p + \mathfrak{c}_p$ и $r_q - \mathfrak{c}_p \leq r_p \leq r_q + \mathfrak{c}_q$, а значит, значения обеих переменных r_p, r_q увеличиваются лишь конечное число раз

Пусть k_p, k_q — наибольшие значения r_p и r_q соответственно

Теорема (живость BSWP). С.п. S BSWP* в условиях справедливости (F1) и (F2) обладает свойством живости BSWP
$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \forall \pi \in \Pi(S) : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\} : out_p[i] \neq \bot \,\&\, out_q \neq \bot$
Доказательство.

По лемме об открытости окна, бесконечно часто допустимо действие отправления хотя бы одного из пакетов $(\mathbf{pack}, in_p[k_q], k_q)$, $(\mathbf{pack}, in_q[k_p], k_p)$

Пусть, для ясности, это пакет $(\mathbf{pack}, in_q[k_p], k_p)$

Согласно (F1), этот пакет отправляется бесконечно часто

Согласно (F2), этот пакет принимается бесконечно часто

По устройству протокола и ограничению $in_q[k_p] \neq \bot$, приём этого сообщения приводит к увеличению значения r_p (*противоречие*) ▼

Д.з. 1. Покажите, что последняя теорема перестаёт быть верной, если убрать хотя бы одно из ограничений (F1), (F2), и для этого приведите соответствующие «неживые» сценарии выполнения протокола

Д.з. 2. Докажите, что если в BSWP* выполняется равенство $\mathfrak{c}_p + \mathfrak{c}_q = 1$ и начальные значения ℓ_p и ℓ_q заменить соответственно на $-\mathfrak{c}_q$ и $-\mathfrak{c}_p$, то во всех достижимых конфигурациях будут выполняться равенства $\ell_p + \mathfrak{c}_q = r_p$ и $\ell_q + \mathfrak{c}_p = r_q$