Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 43

Логические программы:
встроенные предикаты и функции

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Вступление

При помощи ХЛП можно решать любые разрешимые задачи, но всё же чего-то не хватает

Например, если хочется написать программу, складывающую два числá из $\mathbb{N}_0$, то это не получится сделать сильно проще, чем:

1. Использовать представление чисел в виде двоичной записи, и для неё использовать списки, перечисляя биты от младшего к старшему:
   - $13 = (1011)_2 = \mathbf{1.1.0.1.nil}$
   - Использовать *предикат* сложения $\mathrm{plus}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{Z})$ = «Z есть сумма X и Y»
   - Реализовать этот предикат для выбранного представления:

$$\mathrm{plus}(\mathbf{nil}, \mathtt{L}, \mathtt{L});$$
$$\mathrm{plus}(\mathtt{L}, \mathbf{nil}, \mathtt{L});$$
$$\mathrm{plus}(\mathbf{0}.\mathtt{L}, \mathtt{X}.\mathtt{M}, \mathtt{X}.\mathtt{N}) \leftarrow \ldots;$$
$$\mathrm{plus}(\mathbf{1}.\mathtt{L}, \mathtt{X}.\mathtt{M}, \mathtt{Y}.\mathtt{N}) \leftarrow \ldots;$$
$$\ldots$$

Выходит не очень удобно для использования — а нельзя ли лучше?

Вступление

Дальше (в этом блоке слайдов и в следующих) будут обсуждаться конструкции, которые содержатся в языке `Prolog` и существенно повышают удобство практического использования логических программ

Но введение этих конструкций сопряжено с техническими и идеологическими трудностями, из-за которых будем иногда

- «забывать» про декларативную семантику и обсуждать только операционную
- «вспоминать» про декларативную семантику и пытаться преодолеть трудности, иногда полноценно, а иногда только отчасти

Чтобы подчеркнуть расхождение между тем, что будет рассказываться про логические программы дальше, и тем, что рассказывалось до сих пор, не будем называть программы с дальнейшими добавлениями и уточнениями «хорновскими», называя их просто «логические программы»

Встроенные предикаты и функции

В языке логических программ на практике содержатся встроенные предикаты и функции: предикатные и функциональные символы, имеющие предзаданный смысл, выходящий за рамки SLD-резолюции, и предназначенные для записи в телах правил и запросов

Смысл встроенных предикатов будет обсуждаться **только** в рамках операционной семантики, и он будет задаваться как сочетание критерия выполнимости и унификатора:

- Если подцелью выбран не встроенный предикат, то шаг вычисления состоит в обычном построении SLD-резольвенты
- Иначе:
  - Если выполнен критерий выполнимости встроенного предиката, выбранного в качестве подцели, то
    - этот предикат удаляется из запроса, и
    - к оставшейся части запроса применяется унификатор
  - Иначе построенное вычисление считается тупиковым (невозможно выполнить следующий шаг)

Типы данных

В «удобных» языках программирования, как правило, есть хотя бы минимальный набор типов данных

Для примера подробно обсу́дим тип $\mathrm{integer}$ целых чисел:
$\mathbf{0}, \mathbf{1}, (-\mathbf{1}), \mathbf{2}, (-\mathbf{2}), \ldots$

С точки зрения логики предикатов,

- $\mathbf{0}, \mathbf{1}, (-\mathbf{1}), \mathbf{2}, (-\mathbf{2}), \ldots$ — это целочисленные константы
- $\mathrm{integer}$ — это одноместный предикатный символ: $\mathrm{integer}(\mathtt{x}) = $ «$\mathtt{x}$ — целое число»

Типы данных: integer

integer в логических программах — это встроенный одноместный предикат:

- Критерий выполнимости $\mathrm{integer}(t)$: t — это целочисленная константа
- Унификатор: ε

Например:

$?\mathrm{integer}(\mathbf{3}), \mathrm{p}(\mathtt{X})$	$?\mathrm{integer}(\mathbf{0.nil})$	$?\mathrm{integer}(\mathbf{1}+\mathbf{2})$	$?\mathrm{integer}(\mathtt{X})$
$\downarrow \varepsilon$	тупик	тупик	тупик
$?\mathrm{p}(\mathtt{X})$			

Типы данных: integer, $+$, $-$, $\cdot$ ($*$), / (**div**), % (**mod**)

Для целых чисел можно естественно ввести

- операции: $+$, $-$, $\cdot$ (она же $*$), / (она же **div**), % (она же **mod**), ...
  - С точки зрения логики предикатов, это функциональные символы подходящей местности в инфиксной записи с естественным смыслом
- отношения: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, ...
  - С точки зрения логики предикатов, это предикатные символы подходящей местности в инфиксной записи с естественным смыслом
  - Особое место в этом списке занимает отношение равенства, его обсу́дим отдельно позже

Небольшая поправка: знаки операций и отношений, используемые в `Prolog`, могут отличаться, читайте документацию

Типы данных: integer, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$

Отношение $\bowtie \in \{<, \leq, >, \geq\}$ над целыми числами в логических программах — это встроенный двуместный предикат в инфиксной записи:

- Критерий выполнимости $t_1 \bowtie t_2$: t_1 и t_2 — целочисленные константы, входящие в отношение $\bowtie$
- Унификатор: ε

Например:

$$?\mathbf{1} < \mathbf{3}, \mathrm{p}(\mathrm{X}) \quad ?\mathbf{3} < \mathbf{1} \quad ?\mathrm{X} < \mathbf{2} \quad ?\mathbf{1} < \mathbf{1} + \mathbf{2}$$

$$\downarrow \varepsilon \qquad \text{тупик} \qquad \text{тупик} \qquad \text{тупик}$$

$$?\mathrm{p}(\mathrm{X})$$

Как видно по самому правому и самому левому примерам, выражение $\mathbf{1} + \mathbf{2}$ расценивается программой не как число $\mathbf{3}$, а именно как выражение — запись, сама по себе не являющаяся числом

Чтобы **вычислить** это выражение (преобразовать его в число), требуется применить соответствующий предикат

Вычисляющий предикат (is)

is — это встроенный двуместный предикат (записывающийся инфиксно), предназначенный для вычисления значения выражения с записью в переменную:

- Критерий выполнимости $t_1 \,\mathrm{is}\, t_2$:
  - t_1 — переменная и
  - t_2 — выражение (терм), имеющее значение (без переменных и построенное корректно относительно типов)
- Унификатор: $\{t_1/val\}$, где val — значение выражения t_2

Например:

$?\mathtt{X}\,\mathrm{is}\,\mathbf{1}+\mathbf{2}, \mathrm{p}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{Y})$
$\downarrow\{\mathtt{X}/\mathbf{3}\}$
$?\mathrm{p}(\mathbf{3}), \mathrm{r}(\mathtt{Y})$

$?\mathbf{3}\,\mathrm{is}\,\mathbf{1}+\mathbf{2}$ тупик

$?\mathtt{X}\,\mathrm{is}\,\mathbf{1}+\mathtt{Y}$ тупик

$?\mathbf{1}+\mathbf{2}\,\mathrm{is}\,\mathbf{3}$ тупик

$?\mathbf{1}+\mathbf{2}\,\mathrm{is}\,\mathtt{X}$ тупик

Небольшая поправка:

- В интерпретаторе языка `Prolog` с немалой вероятностью во втором слева примере будет не тупик, а шаг вычисления с унификатором ε
- Выше изложена семантика is в «исходном» варианте языка `Prolog`, а остальное здесь считается «отклонением от стандарта»

Предикаты равенства и неравенства (=, ==, \=, =\=)

В `Prolog` используется два вида равенства термов:

- Сильное: посимвольное совпадение
- Слабое: унифицируемость

== — встроенный двуместный предикат сильного равенства в инфиксной записи:

- Критерий выполнимости $t_1 == t_2$: термы t_1 и t_2 посимвольно совпадают
- Унификатор: ε

Например:

$$?\mathtt{X} + \mathbf{1} == \mathtt{X} + \mathbf{1}, \mathrm{p}(\mathtt{X}) \quad \downarrow \varepsilon \quad ?\mathrm{p}(\mathtt{X})$$

$$?\mathtt{X} == \mathbf{1} + \mathbf{2} \quad \text{тупик}$$

$$?\mathbf{3} == \mathbf{1} + \mathbf{2} \quad \text{тупик}$$

$$?\mathtt{X} + \mathbf{1} == \mathbf{1} + \mathtt{X} \quad \text{тупик}$$

$$?\mathtt{X} + \mathbf{1} == \mathbf{2} + \mathtt{X} \quad \text{тупик}$$

$$?\mathbf{1} + \mathbf{2} == \mathbf{2} + \mathbf{1} \quad \text{тупик}$$

Предикаты равенства и неравенства (=, ==, \=, =\=)

$=$ — встроенный двуместный предикат слабого равенства в инфиксной записи:

- Критерий выполнимости $t_1 = t_2$: $\text{У}(t_1, t_2) \neq \emptyset$
- Унификатор: какой-либо наиболее общий унификатор t_1, t_2

Например:

$$?\mathtt{X} + \mathbf{1} = \mathtt{X} + \mathbf{1}, \mathrm{p}(\mathtt{X}) \quad \downarrow \varepsilon \quad ?\mathrm{p}(\mathtt{X})$$

$$?\mathtt{X} = \mathbf{1} + \mathbf{2}, \mathrm{p}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{Y}) \quad \downarrow \{\mathtt{X}/\mathbf{1} + \mathbf{2}\} \quad ?\mathrm{p}(\mathbf{1} + \mathbf{2}), \mathrm{r}(\mathtt{Y})$$

$$?\mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{2}$$
тупик

$$?\mathtt{X} + \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathtt{X}, \mathrm{p}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{Y}) \quad \downarrow \{\mathtt{X}/\mathbf{1}\} \quad ?\mathrm{p}(\mathbf{1}), \mathrm{r}(\mathtt{Y})$$

$$?\mathtt{X} + \mathbf{1} = \mathbf{2} + \mathtt{X}$$
тупик

$$?\mathbf{1} + \mathbf{2} = \mathbf{2} + \mathbf{1}$$
тупик

Предикаты равенства и неравенства (=, ==, \=, =\=)

$=\backslash=$ — встроенный двуместный предикат сильного неравенства в инфиксной записи:

- Критерий выполнимости $t_1 =\backslash= t_2$: t_1 и t_2 не совпадают посимвольно
- Унификатор: ε

Например:

$$?\mathtt{X} + \mathbf{1} =\backslash= \mathtt{X} + \mathbf{1}$$
тупик

$$?\mathtt{X} =\backslash= \mathbf{1} + \mathbf{2}, \mathrm{p}(\mathtt{X})$$
$$\downarrow \varepsilon$$
$$?\mathrm{p}(\mathtt{X})$$

$$?\mathbf{3} =\backslash= \mathbf{1} + \mathbf{2}, \mathrm{p}(\mathtt{X})$$
$$\downarrow \varepsilon$$
$$?\mathrm{p}(\mathtt{X})$$

$$?\mathtt{X} + \mathbf{1} =\backslash= \mathbf{1} + \mathtt{X}, \mathrm{p}(\mathtt{X})$$
$$\downarrow \varepsilon$$
$$?\mathrm{p}(\mathtt{X})$$

$$?\mathtt{X} + \mathbf{1} =\backslash= \mathbf{2} + \mathtt{X}, \mathrm{p}(\mathtt{X})$$
$$\downarrow \varepsilon$$
$$?\mathrm{p}(\mathtt{X})$$

$$?\mathbf{1} + \mathbf{2} =\backslash= \mathbf{2} + \mathbf{1}, \mathrm{p}(\mathtt{X})$$
$$\downarrow \varepsilon$$
$$?\mathrm{p}(\mathtt{X})$$

Предикаты равенства и неравенства (=, ==, \=, =\=)

$\backslash =$ — встроенный двуместный предикат слабого неравенства в инфиксной записи:

- Критерий выполнимости $t_1 \backslash = t_2$: $\text{У}(t_1, t_2) = \emptyset$
- Унификатор: ε

Например:

$?\text{X} + \mathbf{1} \backslash = \text{X} + \mathbf{1}$
тупик

$?\text{X} \backslash = \mathbf{1} + \mathbf{2}$
тупик

$?\mathbf{3} \backslash = \mathbf{1} + \mathbf{2}, \text{p}(\text{X})$
$\downarrow \varepsilon$
$?\text{p}(\text{X})$

$?\text{X} + \mathbf{1} \backslash = \mathbf{1} + \text{X}$
тупик

$?\text{X} + \mathbf{1} \backslash = \mathbf{2} + \text{X}, \text{p}(\text{X})$
$\downarrow \varepsilon$
$?\text{p}(\text{X})$

$?\mathbf{1} + \mathbf{2} \backslash = \mathbf{2} + \mathbf{1}, \text{p}(\text{X})$
$\downarrow \varepsilon$
$?\text{p}(\text{X})$