Лекция 4. Раскраски вершин графов. Хроматическое число графа. Критерий двуцветности графа. Верхние оценки хроматического числа графа. Существование графа без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Раскраска вершин графа

Раскраска вершин графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение

$$\rho : V \to \{1, 2, \dots, k\},$$

в котором из $(v, w) \in E$ следует $\rho(v) \neq \rho(w)$.

Т. е. любые смежные вершины обязаны быть окрашены в разные цвета.

Хроматическое число $\chi(G)$ графа G — наименьшее возможное число цветов, в которое можно раскрасить его вершины.

Для каждого графа $G = (V, E)$ верно соотношение $\chi(G) \leqslant |V|$.

Задача о работах

Пусть найдутся p работ, каждая из которых выполняется единицу времени. При этом некоторые из них не могут выполняться одновременно (например, они требуют общее оборудование). За какое наименьшее число единиц времени можно выполнить все работы?

Задача о размещении

Пусть найдутся p узлов, которые надо разместить на некоторых участках. При этом некоторые пары узлов не могут размещаться на одном и том же участке (например, вместе они превысят энергопотребление). Какое наименьшее число участков требуется для размещения всех узлов?

Двуцветные графы

Граф G — **двуцветный**, если его вершины можно раскрасить в два цвета, т. е. если $\chi(G) \leqslant 2$.

Теорема 1 (Д. Кениг, 1936). *Граф $G = (V, E)$ — двуцветный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.*

Доказательство.
1. Если в графе G есть цикл нечетной длины, то вершины этого цикла в два цвета не раскрасить.

Двуцветные графы

Двуцветные графы

Доказательство.
2. Пусть теперь в графе G нет циклов нечетной длины.
Можно считать, что G — связный граф, иначе проведем рассуждения для каждой его компоненты связности.
Построим в графе G его остовное дерево D.
Выберем произвольную вершину $v \in V$. В дереве D для пары вершин v, w, где $w \in V$, существует ровно одна простая (v, w)-цепь P_w.
Рассмотрим отображение $\rho : V \to \{1, 2\}$:
$\rho(w) = 1$, если длина цепи P_w нечетна;
$\rho(w) = 2$, если длина цепи P_w четна.
Покажем, что ρ является раскраской вершин, т. е. в графе G нет ребер, оба конца которых окрашены в один и тот же цвет.

Двуцветные графы

Доказательство.
Предположим обратное: пусть $(u, w) \in E$ и $\rho(u) = \rho(w)$.
Рассмотрим в графе G замкнутый путь $P = uP_u vP_w w(w, u)u$.
Длина пути P нечетна, т. к. у длин цепей P_u, P_w в дереве D одинаковая четность.
Но из указанного замкнутого пути P можно выделить простой цикл нечетной длины — противоречие. Значит, ρ — раскраска вершин графа G.

$\square$

Двуцветные графы

Двудольные графы

Замечание 1. Отметим, что граф — двуцветный тогда и только тогда, когда он — двудольный.

Верхняя оценка хроматического числа

Предложение 1. *Для каждого графа* $G = (V, E)$ *верно неравенство* $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Доказательство. Можно считать, что G — связный граф. Пусть $v_1 \in V$ — произвольная вершина графа G, и D — его остовное дерево с корнем в вершине v_1.
Обойдем дерево D в глубину, начиная с корня v_1. При этом обходе припишем вершине v_1 номер 1, а затем каждой встречающейся новой вершине будем приписывать следующий номер.
После такого обхода окажется, что каждая вершина v_1 графа G, кроме вершины v_1, смежна с некоторой вершиной с меньшим номером.
Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_p$ — занумерованные вершины множества V, где $p = |V|$.

Верхняя оценка хроматического числа

Верхняя оценка хроматического числа

Доказательство. Сначала укажем раскраску ρ вершин графа G, кроме вершины v_1, в $\Delta(G)$ цветов из множества $C = \{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$.

Вершины $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_2$ раскрасим индукцией по убыванию их номеров. Вершине v_p припишем цвет 1.

Пусть вершины $v_p, \ldots, v_{i+1}$ уже окрашены. Вершина v_i $(i \neq 1)$ смежна хотя бы с одной вершиной с меньшим номером. Значит, она смежна с не более $\Delta(G) - 1$ окрашенных вершин. Припишем ей цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

Теперь рассмотрим вершину v_1. Вершина v_1 смежна с не более $\Delta(G)$ окрашенных вершин. Припишем вершине v_1 цвет, не встречающийся среди смежных с ней вершин, если он найдется, или новый цвет $\Delta(G) + 1$.
Получим раскраску графа G в $\Delta(G) + 1$ цветов.

Верхняя оценка хроматического числа

Достижимость оценки $\Delta(G) + 1$

Если $G = K_n$, то $\Delta(G) = n - 1$ и $\chi(G) = n$.

Если $G = C_{2m+1}$ — цикл нечетной длины, то $\Delta(G) = 2$ и $\chi(G) = 3$.

Достижимость оценки $\Delta(G) + 1$

Верхняя оценка хроматического числа

Следствие 1.1. *Если в графе $G = (V, E)$ найдется вершина $v \in V$, для которой $d_G(v) < \Delta(G)$, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

Действительно, достаточно в доказательстве предложения 1 построить остовное дерево D графа G с корнем в такой вершине v_1, что $d_G(v_1) < \Delta(G)$.

Лемма о трех вершинах

Лемма 1 (о трех вершинах). *Если $G = (V, E)$ — двусвязный граф с $\Delta(G) \geqslant 3$, не являющийся полным графом, то найдутся такие три вершины $u, v, w \in V$, что $(u, w) \notin E$, $(u, v) \in E$, $(w, v) \in E$ и граф $G - \{u, w\}$ — связный.*

Доказательство. Пусть $v_0 \in V$ — такая вершина графа G, что $d_G(v_0) = \Delta(G)$. Граф $G_0 = G - v_0$ является связным.

Лемма о трех вершинах

Лемма о трех вершинах

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда G_0 — двусвязный граф.

Если найдется такая вершина $v \in V$, смежная с вершиной $u = v_0$ и с некоторой такой вершиной $w \in V$, $w \neq u$, что $(u, w) \notin E$, то вершины u, v, w — искомые.

Если все вершины, смежные с вершиной v_0, смежны только друг с другом, то, т. к. G не является полным графом и $\Delta(G) \geqslant 3$, искомые вершины $v = v_0$, $u, w \in V \setminus \{v\}$, $u \neq w$, найдутся.

Лемма о трех вершинах

Лемма о трех вершинах

Доказательство.
Пусть теперь граф G_0 не является двусвязным, и $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — его компоненты двусвязности, $m \geqslant 2$.
Тогда в графе G_0 найдутся хотя бы два висячих блока, например, B_1, B_2, соответственно содержащих точки сочленения c_1, c_2 (возможно совпадение c_1 и c_2).
Значит, вершина $v = v_0$ смежна с некоторой вершиной u блока B_1 и с некоторой вершиной w блока B_2.
В самом деле, если вершина v не смежна ни с одной вершиной, например, блока B_1, то граф $G - c_1$ — не связный, что противоречит двусвязности графа G.
Граф $G - \{u, w\}$ — связный, т. к. вершины u, v принадлежат разным концевым блокам графа G_0 и $d_G(v) \geqslant 3$.
Поэтому вершины u, v, w — искомые.

$\square$

Лемма о трех вершинах

Теорема Брукса

Теорема 2 (Р. Брукс, 1941). *Если G — связный граф с $\Delta(G) \geqslant 3$, не являющийся полным графом, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

Доказательство. Можно считать, что $G = (V, E)$ — двусвязный граф, т. к. иначе рассуждения можно провести для каждой его компоненты двусвязности.

По лемме о трех вершинах найдем в двусвязном графе G такие вершины $u, v_1, w \in V$, что $(u, w) \notin E$, $(u, v_1) \in E$, $(w, v_1) \in E$ и граф $G_1 = G - \{u, w\}$ является связным.

Теорема Брукса

Доказательство. Пусть D_1 — остовное дерево графа G_1 с корнем в вершине v_1.
Обойдем дерево D_1 в глубину, начиная с корня v_1. При этом обходе припишем вершине v_1 номер 1, а затем каждой встречающейся новой вершине будем приписывать следующий номер.
После такого обхода окажется, что каждая вершина v графа G, кроме вершины v_1, смежна с некоторой вершиной с меньшим номером.
Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{p-2}$ — занумерованные вершины множества $V_1 = V \setminus \{u, w\}$, где $p = |V|$.

Теорема Брукса

Доказательство. Укажем раскраску ρ вершин графа G в $\Delta(G)$ цветов из множества $C = \{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$.

Сначала положим $\rho(u) = \rho(w) = 1$.

Вершины $v_{p-2}, v_{p-3}, \ldots, v_1$ окрасим индукцией по убыванию их номеров.

Если вершина v_i не совпадает с вершиной v_1, то она смежна хотя бы с одной вершиной с меньшим номером. Значит, она смежна с не более $\Delta(G) - 1$ окрашенных вершин. Припишем ей цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

Вершина v_1 также смежна с вершинами с не более $\Delta(G) - 1$ цветами, т. к. смежные с ней вершины u, w окрашены в один цвет. Припишем вершине v_1 цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

□

Лемма о трех вершинах

Кликовое число графа

Клика в графе G — полный подграф K_n в графе G.

Клика называется **максимальной**, если она не содержится в клике с большим числом вершин.

Наибольшая клика в графе G — клика с наибольшим числом вершин среди всех клик в этом графе.

Кликовое число $\omega(G)$ графа G — число вершин в его наибольшей клике.

Отметим, что $\chi(G) \geqslant \omega(G)$.

Кликовое число графа

Теорема Зыкова

Теорема 3 (А. А. Зыков, 1949). *Существуют графы без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.*

Доказательство (Я. Мицельский, 1955). Построим по индукции такую последовательность графов $G_2, G_3, \ldots, G_i, \ldots$, что граф G_i не содержит треугольников и $\chi(G_i) = i$, $i = 2, 3, \ldots$.

Базис индукции: положим $G_2 = K_2$.
Индуктивный переход. Если граф G_i уже построен, $G_i = (V_i, E_i)$, $V_i = \{v_1, \ldots, v_n\}$, то положим $G_{i+1} = (V_{i+1}, E_{i+1})$, где

$$V_{i+1} = \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n, w\},$$

(откуда $|V_{i+1}| = 2n + 1$), причем множество E_{i+1} содержит все ребра из множества E_i и дополнительно все ребра (w_j, v_k), если $(v_j, v_k) \in E_i$, а также все ребра (w, w_j), $j, k = 1, \ldots, n$.

Теорема Зыкова

Теорема Зыкова

Доказательство. 1. Граф G_i не содержит треугольников.
В самом деле, граф G_2 — без треугольников.
Если граф G_i — без треугольников, то покажем, что граф G_{i+1} — также без треугольников.
Вершина w не может входить ни в один треугольник, т. к. никакая пара вершин w_j, w_k не соединена ребром.
По той же причине никакие три вершины v_j, w_k, w_l и w_j, w_k, w_l не образуют треугольник.
Если какие-то вершины v_j, v_k, w_l образуют треугольник, то и вершины v_j, v_k, v_l в графе G_i образуют треугольник, чего не может быть.

Теорема Зыкова

Доказательство. 2. Верно равенство $\chi(G_i) = i$.
В самом деле, $\chi(G_2) = 2$.
Если $\chi(G_i) = i$, то покажем, что $\chi(G_{i+1}) = i + 1$.
Пусть ρ — раскраска графа G_i в i цветов. Положим $\rho(w_j) = \rho(v_j)$, $j = 1, \ldots, n$, $\rho(w) = i + 1$. Поэтому $\chi(G_{i+1}) \leqslant i + 1$.
Если найдется раскраска ρ' графа G_{i+1} в i цветов, то на раскраску вершин w_j, $j = 1, \ldots, n$, уйдет не более $(i - 1)$ цветов (т. к. все вершины w_j смежны с вершиной w).
Тогда ρ, $\rho(v_j) = \rho'(w_j)$, $j = 1, \ldots, n$, — раскраска графа G_i в $(i - 1)$ цветов, чего не может быть.

$\square$

Краткий итог лекции

1. Вершины графа можно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.

2. Вершины связного графа G, не являющегося простым циклом нечетной длины или полным графом, можно раскрасить в $\Delta(G)$ цветов.

3. Для любого числа k, $k \geqslant 1$, найдется граф без треугольников с хроматическим числом, равным k.

Задачи

1. Найти хроматическое число графа $G = (V, E)$, если:

1) $G = K_4 - e$, где e — произвольное ребро графа K_4;
2) $G = K_4 - \{e_1, e_2\}$, где e_1, e_2 — произвольные различные ребра графа K_4 (рассмотреть все возможные случаи);
3) $G = K_5 - e$, где e — произвольное ребро графа K_5;
4) $G = K_5 - \{e_1, e_2\}$, где e_1, e_2 — произвольные различные ребра графа K_5 (рассмотреть все возможные случаи).

2. Какое наименьшее число ребер надо удалить из графа $G = (V, E)$, чтобы оставшийся граф можно было раскрасить в k цветов, если:

1) $G = K_4$, $k = 2$;
2) $G = K_5$, $k = 3$;
3) $G = K_6$, $k = 4$;
4) G состоит из 7 вершин, занумерованных числами от 0 до 6, и ребер вида $(i, i + 1 (\mathrm{mod}\ 7))$, $(i, i + 2 (\mathrm{mod}\ 7))$, $i = 0, 1, \ldots, 6$, $k = 3$.

Задачи

3. Найти бесконечную последовательность связных графов $G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots$, $G_i = (V_i, E_i)$, $|V_{i+1}| > |V_i|$, в каждом из которых степени вершин равны трем, при этом $\chi(G_i) = 3$, $i = 1, 2, \ldots$.

4.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 235–243.

2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 152–153.

3. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008. С. 359–361

Конец лекции