

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 28

Даша, Саша, Паша, пиво
и метод семантических таблиц
с методом резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Вступление

В блоке 6 была в качестве иллюстрации предложена такая задача

Дано:

- ▶ Даша любит Сашу,

$$\varphi_1 = L(\mathbf{Д}, \mathbf{С})$$

- ▶ а Саша любит пиво,

$$\varphi_2 = L(\mathbf{С}, \mathbf{п})$$

- ▶ а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

$$\varphi_3 = L(\mathbf{П}, \mathbf{п})$$

$$\psi_1 = \forall x (\exists y (L(\mathbf{п}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\mathbf{п}, x))$$

Выяснить, любит ли кто-нибудь Дашу

$$\chi = \exists x L(x, \mathbf{Д})$$

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi?$$

Или, по теореме о логическом следствии:

$$\models \varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \& \psi_1 \rightarrow \chi?$$

Попробуем решить эту задачу

методом семантических таблиц и методом резолюций

Решение методом семантических таблиц

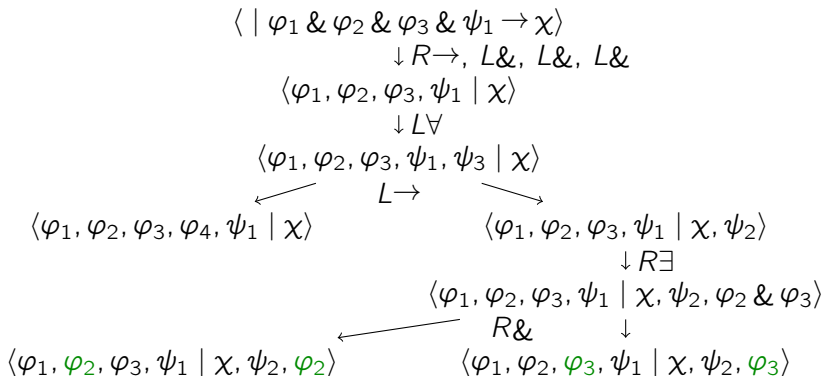
$$\varphi_1 = L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) \quad \psi_1 = \forall x (\exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\mathbf{П}, x))$$

$$\varphi_2 = L(\mathbf{С}, \mathbf{п}) \quad \psi_2 = \exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(\mathbf{С}, y))$$

$$\varphi_3 = L(\mathbf{П}, \mathbf{п}) \quad \psi_3 = \psi_2 \rightarrow \varphi_4$$

$$\varphi_4 = L(\mathbf{П}, \mathbf{С})$$

$$\chi = \exists x L(x, \mathbf{Д})$$



Решение методом семантических таблиц

$$\varphi_1 = L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) \quad \psi_1 = \forall x (\exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\mathbf{П}, x))$$

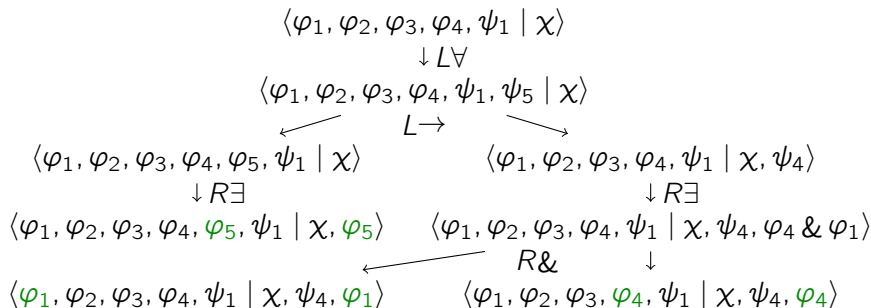
$$\varphi_2 = L(\mathbf{С}, \mathbf{п}) \quad \psi_2 = \exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(\mathbf{С}, y))$$

$$\varphi_3 = L(\mathbf{П}, \mathbf{п}) \quad \psi_3 = \psi_2 \rightarrow \varphi_4$$

$$\varphi_4 = L(\mathbf{П}, \mathbf{С}) \quad \psi_4 = \exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(\mathbf{Д}, y))$$

$$\varphi_5 = L(\mathbf{П}, \mathbf{Д}) \quad \psi_5 = \psi_4 \rightarrow \varphi_5$$

$$\chi = \exists x L(x, \mathbf{Д})$$



Получен успешный табличный вывод

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi$, то есть кто-то действительно любит Дашу

Решение методом резолюций

$$\varphi_1 = L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) \quad \varphi_2 = L(\mathbf{С}, \mathbf{п}) \quad \varphi_3 = L(\mathbf{П}, \mathbf{п})$$

$$\psi_1 = \forall x (\exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\mathbf{П}, x))$$

$$\chi = \exists x L(x, \mathbf{Д})$$

$$\models \varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \& \psi_1 \rightarrow \chi?$$

Этап 1: поставим отрицание над формулой

$$\neg(\varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \& \psi_1 \rightarrow \chi)$$

Этап 2: построим равносильную ПНФ

$$\forall x \forall y \forall z \left(\begin{array}{l} L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) \& L(\mathbf{С}, \mathbf{п}) \& L(\mathbf{П}, \mathbf{п}) \\ \& (\neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\mathbf{П}, x)) \\ \& \neg L(z, \mathbf{Д}) \end{array} \right)$$

Этап 3: построим равновыполнимую ССФ

Формула выше — ССФ

Этап 4: перейдём к системе дизъюнктов

$$S = \left\{ \begin{array}{l} L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}), \quad L(\mathbf{С}, \mathbf{п}), \quad L(\mathbf{П}, \mathbf{п}), \\ \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\mathbf{П}, x), \\ \neg L(z, \mathbf{Д}) \end{array} \right\}$$

Решение методом резолюций

Этап 5: попробуем вывести пустой дизъюнкт

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}), \quad L(\mathbf{С}, \mathbf{п}), \quad L(\mathbf{П}, \mathbf{п}), \\ \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{y}) \vee \neg L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee L(\mathbf{П}, \mathbf{x}), \\ \neg L(\mathbf{z}, \mathbf{Д}) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{y}') \vee \neg L(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \vee L(\mathbf{П}, \mathbf{x}') & \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{y}') \vee \neg L(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \vee L(\mathbf{П}, \mathbf{x}') & L(\mathbf{С}, \mathbf{п}) \\ \{z/\mathbf{П}, x'/\mathbf{Д}, y'/y\} \downarrow & \{x'/\mathbf{С}, y'/y\} \downarrow & \varepsilon \downarrow \\ \neg L(\mathbf{z}, \mathbf{Д}) \rightarrow \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{y}) \vee \neg L(\mathbf{Д}, \mathbf{y}) \rightarrow \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{С}) \rightarrow \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{y}) \vee \neg L(\mathbf{С}, \mathbf{y}) \rightarrow \neg L(\mathbf{С}, \mathbf{п}) \rightarrow \square \\ \{y/\mathbf{С}\} \uparrow & & \{y/\mathbf{п}\} \uparrow \\ & L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) & L(\mathbf{П}, \mathbf{п}) \end{array}$$

Это успешный входной резолютивный вывод $\square$,
инициированный дизъюнктом $\neg L(\mathbf{z}, \mathbf{Д})$

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi$, то есть кто-то действительно любит Дашу

А кто?

Решение методом резолюций

$$\begin{array}{lcl} \neg L(z, \mathbf{Д}) & & \\ \downarrow & \theta_1 = \{z/\mathbf{П}, x'/\mathbf{Д}, y'/y\} & \\ \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(\mathbf{Д}, y) & & \\ \downarrow & \theta_2 = \{y/\mathbf{С}\} & \\ \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{С}) & & \\ \downarrow & \theta_3 = \{x'/\mathbf{С}, y'/y\} & \\ \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(\mathbf{С}, y) & & \\ \downarrow & \theta_4 = \{y/\mathbf{П}\} & \\ \neg L(\mathbf{С}, \mathbf{П}) & & \\ \downarrow & \theta_5 = \varepsilon & \\ \square & & \end{array}$$

Тайный поклонник Даши в выводе обозначен переменной z

Посмотрим, как эта переменная изменялась унификаторами:

$$z\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = \mathbf{П}$$

Оказывается, что Дашу любит Паша

(могут быть и другие поклонники, но про них мы ничего не знаем)

А что это за «трюк» с применением подстановок,
в каких случаях и как именно он работает?

Заключительный пример

Перед детальным обсуждением этого «трюка» —
пример задачи, для которой так вычислить ответ нельзя

- ▶ Если вечером будет дождь, то мы пойдём в кино
 $\text{Будет(дождь)} \rightarrow \text{Досуг(кино)}$
- ▶ Если вечером дождя не будет, то мы пойдём гулять в парк
 $\neg \text{Будет(дождь)} \rightarrow \text{Досуг(парк)}$

Где мы проведём этот вечер?

Действуя по аналогии с задачей о Даше, Саше, Паше и пиве, вопрос можно ослабить так, понадеявшись на тот же «трюк» с вычислением:

Есть ли такое место, которое мы посетим этим вечером?

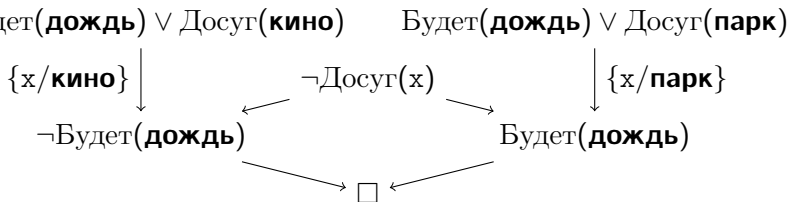
$\exists x \text{ Досуг}(x) ?$

Заключительный пример

По аналогии с задачей о Даше, Саше, Паше и пиве получим систему дизъюнктов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \neg \text{Будет}(\text{дождь}) \vee \text{Досуг}(\text{кино}) \\ \text{Будет}(\text{дождь}) \vee \text{Досуг}(\text{парк}) \\ \neg \text{Досуг}(x) \end{array} \right\}$$

Такое место действительно существует:



Но по выводу невозможно понять, куда же мы пойдём

Это невозможно понять и с использованием любых других методов, пока не станет известно, есть ли вечером дождь