Лекция 1. Функции k-значной логики. Формулы. Теоремы о представлении функций k-значной логики в 1-й и 2-й формах.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Множество E_k^n

Пусть $k \geqslant 2$ — целое число и $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Будем рассматривать множество E_k^n, $n \geqslant 1$. Множество E_k^n будем также называть n-**мерным** k-**значным кубом**.

Отметим, что $|E_k^n| = k^n$.

Любой элемент из E_k^n будем называть **набором** (**длины** n). При этом составляющие набор элементы множества E_k будем называть его **разрядами**, или **компонентами**.

Как правило, наборы из множества E_k^n будем обозначать греческими буквами начала алфавита: α, β и т. д., возможно, с индексами.

При этом если $\alpha \in E_k^n$, то $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; если $\alpha_j \in E_2^n$, то $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,n})$.

Лексико-графический порядок на E_k^n

Номером $\|\alpha\|$ набора $\alpha \in E_2^n$ назовем целое неотрицательное число, для которого запись в k-ичной системе счисления имеет вид $\alpha_1 \dots \alpha_n$.

Другими словами,

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot k^{n-i}.$$

Отметим, что $0 \leqslant \|\alpha\| \leqslant k^n - 1$.

(Линейное) упорядочивание наборов из E_k^n в порядке возрастания их номеров назовем **лексико-графическим** (или **алфавитным**) порядком на E_k^n.

Функции k-значной логики

Считаем, что задано (счетное) множество переменных X, принимающих значения из множества E_k.

Будем рассматривать функции, зависящие от переменных из множества X, и принимающие значения из множества E_k.

Функции k-значной логики

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$, где $n \geqslant 1$, называется (n-местной) **функцией k-значной логики**, или **k-значной функцией**, если

$$f : E_k^n \to E_k.$$

При этом говорим, что $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — функция n переменных $x_1, \dots, x_n$.

Константы $0, 1, \dots, k-1$ считаем 0-местными k-значными функциями (функциями без переменных).

Функции k-значной логики

Множество всех k-значных функций обозначим P_k; множество всех k-значных функций n заданных переменных, например, переменных $x_1, \ldots, x_n$, обозначим $P_k^{(n)}$.

При $k = 2$ функции k-значной логики называются **функциями алгебры логики**, или **булевыми функциями**.

При $k \geqslant 3$ функции k-значной логики называются **функциями многозначной логики**.

Таблица значений

Функции k-значной логики можно задавать **таблицами значений**.

Упорядочим все наборы множества E_k^n в *лексико-графическом* порядке и сопоставим каждому набору значение функции на нем:

x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\ldots$	0	0	$f(0, \ldots, 0, 0)$
0	$\ldots$	0	1	$f(0, \ldots, 0, 1)$
	$\ldots$			
0	$\ldots$	0	$k-1$	$f(0, \ldots, 0, k-1)$
	$\ldots$			
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	0	$f(k-1, \ldots, k-1, 0)$
	$\ldots$			
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	$k-2$	$f(k-1, \ldots, k-1, k-2)$
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	$k-1$	$f(k-1, \ldots, k-1, k-1)$

Вектор значений

Если наборы из E_k^n упорядочены лексико-графически, то функция $f \in P_k^{(n)}$ однозначно задается правым столбцом ее таблицы значений. Назовем его **вектором значений** функции f и обозначим α_f. Другими словами,

$$\alpha_f = (f(\alpha_0), f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_{k^n-1})) \in E_k^{k^n},$$

где наборы $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k^n-1}$ из E_k^n перечислены в лексико-графическом порядке.

Число k-значных функций n переменных

Предложение 1. *Пусть* $k \geqslant 2$. *При* $n \geqslant 1$ *верно равенство:* $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

Доказательство.

Каждую функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^{(n)}$ можно задать таблицей с k^n строками.

В каждой строке этой таблицы — значение этой функции на соответствующем наборе из k возможных значений из E_k.

При этом разные таблицы определяют различные функции.

Поэтому $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

$\square$

Функции k-значной логики

Рассмотрим некоторые важные k-значные функции:

1. $n = 0$: **константы** $0, 1, \ldots, k-1$.

2. $n = 1$:

1) x — **тождественная функция** переменной x;

2) $\bar{x} = x + 1 \pmod{k}$ — **отрицание Поста** x;

3) $\sim x = (k-1) - x$ — **отрицание Лукасевича** x;

4) $-x = k - x \pmod{k}$ — **минус** x:

x	x	$\bar{x}$	$\sim x$	$-x$
0	0	1	$k-1$	0
1	1	2	$k-2$	$k-1$
$\ldots$				
$k-2$	$k-2$	$k-1$	1	2
$k-1$	$k-1$	0	0	1

Функции k-значной логики

5) **характеристические функции** $J_i(x)$, $j_i(x)$, где $i \in E_k$:

$$J_i(x) = \begin{cases} k-1, & x = i, \\ 0, & x \neq i, \end{cases} \quad j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i, \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

Функции k-значной логики

3. $n = 2$:

1) $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ — сложение, вычитание и умножение по модулю k;

2) $\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \leqslant y, \\ y, & x > y, \end{cases}$ — минимум из x и y;

3) $\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geqslant y, \\ y, & x < y, \end{cases}$ — максимум из x и y.

4) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geqslant y, \\ 0, & x < y, \end{cases}$ — усеченная разность;

5) $x \to y = \begin{cases} k - 1, & x \leqslant y, \\ (k - 1) - (x - y), & x > y, \end{cases}$ — импликация.

Функции k-значной логики

4. обобщения:

1) $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \dots, x_n))$;

2) $\max(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \dots, x_n))$;

3) $x^s = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{s}$ — степень, $s \geqslant 1$.

Функции k-значной логики

Каким функциям алгебры (двузначной) логики соответствуют функции k-значной логики при $k \geqslant 3$?

n	$P_k, k \geqslant 3$	P_2
$n = 0$	$0, 1, \ldots, k-1$	$0, 1$
$n = 1$	x	x
	$\bar{x}, \sim x$	$\bar{x}$
	$J_0(x), j_0(x)$	$\bar{x}$
	$J_{k-1}(x), j_{k-1}(x)$	x
$n = 2$	$\min(x, y)$	$x \& y$
	$\max(x, y)$	$x \vee y$
	$x + y$	$x \oplus y$
	$x \cdot y$	$x \cdot y$

Функции k-значной логики

В k-значной логике аналогично двузначной логике вводятся понятия существенной и несущественной переменных, формулы над множеством функций и функции, определяемой формулой.

Существенные и несущественные переменные

Переменная x_i называется **существенной** для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, если найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in E_k$, что

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq Const.$$

Т. е. переменная x_i является существенной, если все другие переменные можно так определить, что полученная функция одной переменной x_i принимает хотя бы два различных значения.

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

Считаем, что несущественные переменные можно удалять и добавлять; при этом получается функция, равная исходной, но зависящая от другого множества переменных.

Равенство и конгруэнтность функций

Функции f и g называем **равными**, если конечным числом удалений или добавлений несущественных переменных из них можно получить совпадающие функции.

Функции f и g называем **конгруэнтными**, если равные им функции отличаются только именами переменных.

Примеры.

1. Функции $f_1(x) = 0$ и $f_2 = 0$ равны.
2. Функции $g(x) = x$ и $h(y) = y$ конгруэнтны.

Формула

Пусть $A \subseteq P_k$, причем каждая функция из A имеет свое, отличное от других функций, обозначение.

Формула над множеством A определяется по индукции.

1. *Базис индукции*. Если x — переменная (из X), то выражение x — формула.

2. *Индуктивный переход*. Если $F_1, \ldots, F_m$ — уже построенные формулы (не обязательно различные) и f — обозначение m-местной функции из A, то выражение $f(F_1, \ldots, F_m)$ — формула.

3. Других формул нет, т. е. каждая формула построена либо по базису индукции, либо по индуктивному переходу.

Формулы

Пример. Пусть $A = \{0, 1, \dots, k-1, \sim x, x^2, x \cdot y\} \subseteq P_5$.
Тогда:

$F_1 = x$	формула по базису индукции для переменной x;
$F_2 = x^2$	формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы F_1 и функции $x^2 \in A$;
$F_3 = 3$	формула по индуктивному переходу для функции $3 \in A$;
$F_4 = 3 \cdot x^2$	формула по индуктивному переходу для уже построенных формул F_3, F_2 и функции $x \cdot y \in A$;
$F_5 = \sim (3 \cdot x^2)$	формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы F_4 и функции $\sim x \in A$;
	и т. д.

Функция, определяемая формулой

Пусть F — формула над множеством A, $A \subseteq P_k$, в которой встречаются только переменные $x_1, \ldots, x_n$ (не обязательно все).

Тогда формула F задает некоторую **функцию** $f_F \in P_k$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ (возможно, зависящую не от всех переменных существенно).

Функция, определяемая формулой

Значение функции $f_F(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе $\alpha \in E_k^n$ определяется по индукции.

1. *Базис индукции*. Если $F = x_i$, где x_i — переменная, то

$$f_F(\alpha) = \alpha_i.$$

2. *Индуктивный переход*. Если $F = f(F_1, \ldots, F_m)$, где $F_1, \ldots, F_m$ — формулы и f — обозначение m-местной функции из A, то

$$f_F(\alpha) = f(f_{F_1}(\alpha), \ldots, f_{F_m}(\alpha)).$$

Здесь пользуемся тем, что f обозначает какую-то функцию из A.

Функция, определяемая формулой

Другими словами:

1) если $F = x$, где x — переменная, то $f_F(x) = x$, т. е. f_F — тождественная функция переменной x;

2) если $F = f(F_1, \dots, F_m)$, где $F_1, \dots, F_m$ — формулы и f — обозначение m-местной функции из A, то

$$f_F(x_1, \dots, x_n) = f(f_{F_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{F_m}(x_1, \dots, x_n)),$$

т. е. f_F является соответствующей композицией функций $f \in A$ и $f_{F_1}, \dots, f_{F_m}$.

Функции, определяемые формулами

Пример. Найдем функцию $f_{F_5}(x) \in P_5$, которая задается формулой F_5:

x	x^2	$3 \cdot x^2$	$\sim (3 \cdot x^2)$
0	0	0	4
1	1	3	1
2	4	2	2
3	4	2	2
4	1	3	1

Значения функции $f_{F_5}(x)$ на каждом наборе значений ее переменной x записаны в самом правом столбце.

Эквивалентные формулы

Пусть F_1, F_2 — формулы над множеством A, $A \subseteq P_k$, в которых встречаются только переменные $x_1, \ldots, x_n$ (не обязательно все).

Если для любого набора $\alpha \in E_k^n$ верно $f_{F_1}(\alpha) = f_{F_2}(\alpha)$, то формулы F_1 и F_2 называются **эквивалентными**.

Другими словами, формулы F_1 и F_2 — эквивалентны, если они определяют равные функции, т. е. функции f_{F_1} и f_{F_2} равны.

Обозначение эквивалентных формул: $F_1 = F_2$.

Тождества

Если F_1 и F_2 — эквивалентные формулы, то выражение

$$F_1 = F_2$$

называется **тождеством**.

Верны следующие свойства:
1) коммутативность связок $\cdot, +, \min, \max$;
2) ассоциативность связок $\cdot, +, \min, \max$;
3) дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

И многие другие.

Доказательство тождеств

Примеры.

1. Докажем тождество: $-(\bar{x}) = \sim x$.

$$-(\bar{x}) = -(x+1) = (k-1) - x = \sim x.$$

2. Докажем тождество: $\sim \max(\sim x, \sim y) = \min(x, y)$.

$$\sim \max(\sim x, \sim y) =$$

$$= (k-1) - \begin{cases} (k-1) - x, & (k-1) - x \geqslant (k-1) - y, \\ (k-1) - y, & (k-1) - x < (k-1) - y, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x, & x \leqslant y, \\ y, & x > y, \end{cases} = \min(x, y).$$

Доказательство тождеств

Примеры.

3. Докажем тождество: $x \dot{-} (x \dot{-} y) = \min(x, y)$.

$$x \dot{-} (x \dot{-} y) = x \dot{-} \begin{cases} x - y, & x \geqslant y, \\ 0, & x < y, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x - (x - y), & x \geqslant y, \\ x, & x < y, \end{cases} = \begin{cases} y, & x \geqslant y, \\ x, & x < y, \end{cases} = \min(x, y).$$

Выразимость

Пусть $A \subseteq P_k$. Какие функции из P_k можно выразить формулами над A?

Сначала рассмотрим некоторые множества, над которыми можно выразить любую функцию из P_k.

1-я форма

Теорема 1 (о 1-й форме). *Пусть* $k \geqslant 2$. *При* $n \geqslant 1$ *каждая функция* $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ *может быть представлена в виде:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \max_{\sigma \in E_k^n} \min \left(J_{\sigma_1}(x_1), \dots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma) \right).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор $\alpha \in E_k^n$ и подставим его в левую и правую части равенства из утверждения теоремы:

$$f(\alpha) = \max_{\sigma \in E_k^n} \min \left(J_{\sigma_1}(\alpha_1), \dots, J_{\sigma_n}(\alpha_n), f(\sigma) \right).$$

1-я форма

Доказательство. Набор σ пробегает все значения из множества E_k^n, а набор α — какой-то набор из E_k^n.

1. Если $\sigma \neq \alpha$, то найдется такое i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\sigma_i \neq \alpha_i$. Значит, $J_{\sigma_i}(\alpha_i) = 0$, откуда в этом случае:

$$\min(J_{\sigma_1}(\alpha_1), \dots, J_{\sigma_{i-1}}(\alpha_{i-1}), 0, J_{\sigma_{i+1}}(\alpha_{i+1}), \dots, J_{\sigma_n}(\alpha_n), f(\sigma)) = 0.$$

2. Если $\sigma = \alpha$, то для всех i, $i = 1, \dots, n$, верно $\sigma_i = \alpha_i$, а значит, $J_{\sigma_i}(\alpha_i) = k - 1$. Поэтому в этом случае:

$$\min(k-1, \dots, k-1, f(\alpha)) = f(\alpha).$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = \max(0, \dots, 0, f(\alpha), 0, \dots, 0) = f(\alpha).$$

□

1-я форма

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \bar{x} \in P_3$:

x	f
0	1
1	2
2	0

Запишем ее в 1-й форме:

$$\begin{aligned} f(x) &= \max\left(\min(J_0(x), f(0)), \min(J_1(x), f(1)), \min(J_2(x), f(2))\right) = \\ &= \max\left(\min(J_0(x), 1), \min(J_1(x), {\color{green}2}), {\color{red}\min(J_2(x), 0)}\right) = \\ &= \max(\min(J_0(x), 1), J_1(x)). \end{aligned}$$

2-я форма

Теорема 2 (о 2-й форме) *Пусть* $k \geqslant 2$. *При* $n \geqslant 1$ *каждая функция* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ *может быть представлена в виде:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma).$$

Доказательство повторяет доказательство предыдущего утверждения.

2-я форма

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = J_2(x + x^2) \in P_4$:

x	x^2	$x + x^2$	f
0	0	0	0
1	1	2	3
2	0	2	3
3	1	0	0

Запишем ее во 2-й форме:

$$\begin{aligned} f(x) &= j_0(x) \cdot f(0) + j_1(x) \cdot f(1) + j_2(x) \cdot f(2) + j_3(x) \cdot f(3) = \\ &= j_0(x) \cdot {\color{red}0} + j_1(x) \cdot 3 + j_2(x) \cdot 3 + j_3(x) \cdot {\color{red}0} = 3j_1(x) + 3j_2(x). \end{aligned}$$

1-я и 2-я формы

Пример. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \min(x^2, y) \in P_3$ ($f(x,y)$ указано на пересечении строки x и столбца y):

$x \setminus y$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1

1-я форма для f:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \max(\min(J_1(x), J_1(y), 1), \min(J_1(x), J_2(y), 1), \\ &\quad \min(J_2(x), J_1(y), 1), \min(J_2(x), J_2(y), 1)). \end{aligned}$$

2-я форма для f:

$$f(x,y) = j_1(x)j_1(y) + j_1(x)j_2(y) + j_2(x)j_1(y) + j_2(x)j_2(y).$$

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.

2. Марченков С. С. Избранные главы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2016.

3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.