# Лекция 1. Функции $k$-значной логики. Формулы. Теоремы о представлении функций $k$-значной логики в 1-й и 2-й формах.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

# Множество $E_k^n$

Пусть $k \geqslant 2$ — целое число, и $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Будем рассматривать множество $E_k^n$, $n \geqslant 1$. Множество $E_k^n$ будем также называть $n$-**мерным** $k$-**значным кубом**.

Ясно, что $|E_k^n| = k^n$.

Любой элемент из $E_k^n$ будем называть **набором** (**длины** $n$). При этом составляющие набор элементы множества $E_k$ будем называть его **разрядами**, или **компонентами**.

Как правило, наборы из множества $E_k^n$ будем обозначать греческими буквами начала алфавита: $\alpha$, $\beta$ и т. д., возможно, с индексами.

При этом если $\alpha \in E_k^n$, то $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; если $\alpha_j \in E_2^n$, то $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,n})$.

# Лексико-графический порядок на $E_k^n$

**Номером** $\|\alpha\|$ набора $\alpha \in E_2^n$ назовем целое неотрицательное число, для которого запись в $k$-ичной системе счисления имеет вид $\alpha_1 \ldots \alpha_n$.

Другими словами,

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot k^{n-i}.$$

Отметим, что $0 \leqslant \|\alpha\| \leqslant k^n - 1$.

(Линейное) упорядочивание наборов из $E_k^n$ в порядке возрастания их номеров назовем **лексико-графическим** (или **алфавитным**) порядком на $E_k^n$.

# Функции $k$-значной логики

Считаем, что задано (счетное) множество переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, каждая из которых может принимать значения из множества $E_k$.

Будем рассматривать функции, зависящие от переменных из множества $X$, и принимающие значения из множества $E_k$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, называется ($n$-местной) **функцией $k$-значной логики**, или **$k$-значной функцией**, если

$$f : E_k^n \to E_k.$$

При этом говорим, что $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Константы $0, 1, \ldots, k-1$ считаем 0-местными $k$-значными функциями (функциями без переменных).

# Функции $k$-значной логики

Пусть $P_k$ обозначает множество всех $k$-значных функций (любых переменных из $X$) и $P_k^{(n)}$ обозначает множество всех $k$-значных функций, зависящих от $n$ заданных переменных, например, от переменных $x_1, \dots, x_n$.

При $k = 2$ функции $k$-значной логики называются **функциями алгебры логики**, или **булевыми функциями**.

При $k \geqslant 3$ функции $k$-значной логики называются **функциями многозначной логики**.

# Таблица значений

Функции $k$-значной логики можно задавать **таблицами значений**.

Упорядочим все наборы множества $E_k^n$ в *лексико-графическом* порядке и сопоставим каждому набору значение функции на нем:

| $x_1$ | $\ldots$ | $x_{n-1}$ | $x_n$ | $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\ldots$ | 0 | 0 | $f(0, \ldots, 0, 0)$ |
| 0 | $\ldots$ | 0 | 1 | $f(0, \ldots, 0, 1)$ |
| | $\ldots$ | | | |
| 0 | $\ldots$ | 0 | $k-1$ | $f(0, \ldots, 0, k-1)$ |
| | $\ldots$ | | | |
| $k-1$ | $\ldots$ | $k-1$ | 0 | $f(k-1, \ldots, k-1, 0)$ |
| | $\ldots$ | | | |
| $k-1$ | $\ldots$ | $k-1$ | $k-2$ | $f(k-1, \ldots, k-1, k-2)$ |
| $k-1$ | $\ldots$ | $k-1$ | $k-1$ | $f(k-1, \ldots, k-1, k-1)$ |

# Вектор значений

Если наборы из $E_k^n$ упорядочены лексико-графически, то функция $f \in P_k^{(n)}$ однозначно задается правым столбцом ее таблицы значений. Назовем его **вектором значений** функции $f$ и обозначим $\alpha_f$. Другими словами,

$$\alpha_f = (f(\alpha_0), f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_{k^n-1})) \in E_k^{k^n},$$

где наборы $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k^n-1}$ из $E_k^n$ перечислены в лексико-графическом порядке.

# Число $k$-значных функций $n$ переменных

**Предложение 1.** *Пусть $k \geqslant 2$. При $n \geqslant 1$ верно равенство:* $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

**Доказательство.**
Каждую функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^{(n)}$ можно задать таблицей с $k^n$ строками.
В каждой строке этой таблицы — значение этой функции на соответствующем наборе из $k$ возможных значений из $E_k$.
При этом разные таблицы определяют различные функции.
Поэтому $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

□

# Функции $k$-значной логики

Рассмотрим некоторые важные $k$-значные функции:

1. $n = 0$: **константы** $0, 1, \ldots, k-1$.

2. $n = 1$:

1) $x$ — **тождественно равная** $x$;

2) $\bar{x} = x + 1 (\text{mod } k)$ — **отрицание Поста** $x$;

3) $\sim x = (k-1) - x$ — **отрицание Лукасевича** $x$;

4) $-x = k - x (\text{mod } k)$ — **минус** $x$:

| $x$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\sim x$ | $-x$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $k-1$ | $0$ |
| $1$ | $1$ | $2$ | $k-2$ | $k-1$ |
| $\ldots$ | | | | |
| $k-2$ | $k-2$ | $k-1$ | $1$ | $2$ |
| $k-1$ | $k-1$ | $0$ | $0$ | $1$ |

# Функции $k$-значной логики

5) **характеристические функции** $J_i(x)$, $j_i(x)$, где $i \in E_k$:

$$J_i(x) = \begin{cases} k-1, & x = i, \\ 0, & x \neq i, \end{cases} \quad j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i, \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

# Функции $k$-значной логики

3. $n = 2$:

1) $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ — сложение, вычитание и умножение по модулю $k$;

2) $\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \leqslant y, \\ y, & x > y, \end{cases}$ — минимум из $x$ и $y$;

3) $\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geqslant y, \\ y, & x < y, \end{cases}$ — максимум из $x$ и $y$.

4) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geqslant y, \\ 0, & x < y, \end{cases}$ — усеченная разность;

5) $x \to y = \begin{cases} k - 1, & x \leqslant y, \\ (k - 1) - (x - y), & x > y, \end{cases}$ — импликация.

# Функции $k$-значной логики

4. обобщения:

1) $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \ldots, x_n))$;

2) $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \ldots, x_n))$;

3) $x^s = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{s}$ — степень, $s \geqslant 1$.

# Функции $k$-значной логики

Каким функциям алгебры (двузначной) логики соответствуют функции $k$-значной логики при $k \geqslant 3$?

| $n$ | $P_k, k \geqslant 3$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| $n = 0$ | $0, 1, \ldots, k-1$ | $0, 1$ |
| $n = 1$ | $x$ | $x$ |
| | $\bar{x}, \sim x$ | $\bar{x}$ |
| | $J_0(x), j_0(x)$ | $\bar{x}$ |
| | $J_{k-1}(x), j_{k-1}(x)$ | $x$ |
| $n = 2$ | $\min(x, y)$ | $x \& y$ |
| | $\max(x, y)$ | $x \vee y$ |
| | $x + y$ | $x \oplus y$ |
| | $x \cdot y$ | $x \cdot y$ |

# Функции $k$-значной логики

В $k$-значной логике аналогично двузначной логике вводятся понятия существенной и несущественной переменных, равенства функций с точностью до несущественных переменных; понятия формулы над множеством функций и функции, определяемой формулой.

## Существенные и несущественные переменные

Переменная $x_i$ называется **существенной** для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, если найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in E_k$, что

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq Const.$$

Т. е. переменная $x_i$ является существенной, если все другие переменные можно так определить, что полученная функция одной переменной $x_i$ принимает хотя бы два различных значения.

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

*Считаем, что несущественные переменные можно удалять и добавлять; при этом получается функция, равная исходной, но зависящая от другого множества переменных.*

# Равенство и конгруэнтность функций

Функции $f$ и $g$ называем **равными**, если конечным числом удалений или добавлений несущественных переменных из них можно получить совпадающие функции.

Функции $f$ и $g$ называем **конгруэнтными**, если равные им функции отличаются только именами переменных.

**Примеры.**

1. Функции $f_1(x) = 0$ и $f_2 = 0$ равны.
2. Функции $g(x) = x$ и $h(y) = y$ конгруэнтны.

# Формула

Пусть $A \subseteq P_k$, причем каждая функция из $A$ имеет свое, отличное от других функций, обозначение.

**Формула** над множеством $A$ определяется по индукции.

1. *Базис индукции*. Если $x$ — переменная (из $X$), то выражение $x$ — формула.

2. *Индуктивный переход*. Если $F_1, \dots, F_m$ — уже построенные формулы (не обязательно различные) и $f$ — обозначение $m$-местной функции из $A$, то выражение $f(F_1, \dots, F_m)$ — формула.

3. Других формул нет, т. е. каждая формула построена либо по базису индукции, либо по индуктивному переходу.

# Формулы

**Пример**. Пусть $A = \{0, 1, \dots, k-1, \sim x, x^2, x \cdot y\} \subseteq P_5$.
Тогда:

| | |
|---|---|
| $F_1 = x$ | формула по базису индукции для переменной $x$; |
| $F_2 = x^2$ | формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы $F_1$ и функции $x^2 \in A$; |
| $F_3 = 3$ | формула по индуктивному переходу для функции $3 \in A$; |
| $F_4 = 3 \cdot x^2$ | формула по индуктивному переходу для уже построенных формул $F_3$, $F_2$ и функции $x \cdot y \in A$; |
| $F_5 = \sim(3 \cdot x^2)$ | формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы $F_4$ и функции $\sim x \in A$; |
| | и т. д. |

# Функция, определяемая формулой

Пусть $F$ — формула над множеством $A$, $A \subseteq P_k$, в которой встречаются только переменные $x_1, \ldots, x_n$ (не обязательно все).

Тогда формула $F$ задает некоторую **функцию** $f_F \in P_k$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ (возможно, зависящую не от всех переменных существенно).

# Функция, определяемая формулой

Значение функции $f_F(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе $\alpha \in E_k^n$ определяется по индукции.

1. *Базис индукции*. Если $F = x_i$, где $x_i$ — переменная, то

$$f_F(\alpha) = \alpha_i.$$

2. *Индуктивный переход*. Если $F = f(F_1, \ldots, F_m)$, где $F_1, \ldots, F_m$ — формулы и $f$ — обозначение $m$-местной функции из $A$, то

$$f_F(\alpha) = f(f_{F_1}(\alpha), \ldots, f_{F_m}(\alpha)).$$

Здесь пользуемся тем, что $f$ обозначает какую-то функцию из $A$.

# Функция, определяемая формулой

Другими словами:

1) если $F = x$, где $x$ — переменная, то $f_F(x) = x$, т. е. функция $f_F$ тождественно равна переменной $x$;

2) если $F = f(F_1, \dots, F_m)$, где $F_1, \dots, F_m$ — формулы и $f$ — обозначение $m$-местной функции из $A$, то

$$f_F(x_1, \dots, x_n) = f(f_{F_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{F_m}(x_1, \dots, x_n)),$$

т. е. $f_F$ является соответствующей композицией функций $f \in A$ и $f_{F_1}, \dots, f_{F_m}$.

# Функции, определяемые формулами

**Пример**. Найдем функцию $f_{F_5}(x) \in P_5$, которая задается формулой $F_5$:

| $x$ | $x^2$ | $3 \cdot x^2$ | $\sim (3 \cdot x^2)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 1 | 3 | 1 |
| 2 | 4 | 2 | 2 |
| 3 | 4 | 2 | 2 |
| 4 | 1 | 3 | 1 |

Значения функции $f_{F_5}(x)$ на каждом наборе значений ее переменной $x$ записаны в самом правом столбце.

# Эквивалентные формулы

Пусть $F_1$, $F_2$ — формулы над множеством $A$, $A \subseteq P_k$, в которых встречаются только переменные $x_1, \ldots, x_n$ (не обязательно все).

Если для любого набора $\alpha \in E_k^n$ верно $f_{F_1}(\alpha) = f_{F_2}(\alpha)$, то формулы $F_1$ и $F_2$ называются **эквивалентными**.

Другими словами, формулы $F_1$ и $F_2$ — эквивалентны, если они определяют равные функции, т. е. функции $f_{F_1}$ и $f_{F_2}$ равны.

Обозначение эквивалентных формул: $F_1 = F_2$.

# Тождества

Если $F_1$ и $F_2$ — эквивалентные формулы, то выражение

$$F_1 = F_2$$

называется **тождеством**.

Верны следующие свойства:
1) коммутативность связок $\cdot, +, \min, \max$;
2) ассоциативность связок $\cdot, +, \min, \max$;
3) дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

И многие другие.

# Доказательство тождеств

**Примеры.**

1. Докажем тождество: $-(\bar{x}) = \sim x$.

$$-(\bar{x}) = -(x+1) = (k-1) - x = \sim x.$$

2. Докажем тождество: $\sim \max(\sim x, \sim y) = \min(x, y)$.

$$\sim \max(\sim x, \sim y) =$$

$$= (k-1) - \begin{cases} (k-1) - x, & (k-1) - x \geqslant (k-1) - y, \\ (k-1) - y, & (k-1) - x < (k-1) - y, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x, & x \leqslant y, \\ y, & x > y, \end{cases} = \min(x, y).$$

# Доказательство тождеств

**Примеры.**

3. Доказем тождество: $x\dot{-}(x\dot{-}y) = \min(x, y)$.

$$x\dot{-}(x\dot{-}y) = x\dot{-}\begin{cases} x-y, & x \geqslant y,\\ 0, & x < y, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x-(x-y), & x \geqslant y,\\ x, & x < y, \end{cases} = \begin{cases} y, & x \geqslant y,\\ x, & x < y, \end{cases} = \min(x, y).$$

# Выразимость

Пусть $A \subseteq P_k$. Какие функции из $P_k$ можно выразить формулами над $A$?

Сначала рассмотрим некоторые множества, над которыми можно выразить любую функцию из $P_k$.

# 1-я форма

**Теорема 1 (о 1-й форме).** *Пусть $k \geqslant 2$. При $n \geqslant 1$ каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ может быть представлена в виде:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \max_{\sigma \in E_k^n} \min \left( J_{\sigma_1}(x_1), \ldots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma) \right).$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный набор $\alpha \in E_k^n$ и подставим его в левую и правую части равенства из утверждения теоремы:

$$f(\alpha) = \max_{\sigma \in E_k^n} \min \left( J_{\sigma_1}(\alpha_1), \ldots, J_{\sigma_n}(\alpha_n), f(\sigma) \right).$$

# 1-я форма

**Доказательство**. Набор $\sigma$ пробегает все значения из множества $E_k^n$, а набор $\alpha$ — какой-то набор из $E_k^n$.

1. Если $\sigma \neq \alpha$, то найдется такое $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\sigma_i \neq \alpha_i$. Значит, $J_{\sigma_i}(\alpha_i) = 0$, откуда в этом случае:

$$\min(J_{\sigma_1}(\alpha_1), \ldots, J_{\sigma_{i-1}}(\alpha_{i-1}), 0, J_{\sigma_{i+1}}(\alpha_{i+1}), \ldots, J_{\sigma_n}(\alpha_n), f(\sigma)) = 0.$$

2. Если $\sigma = \alpha$, то для всех $i$, $i = 1, \ldots, n$, верно $\sigma_i = \alpha_i$, а значит, $J_{\sigma_i}(\alpha_i) = k - 1$. Поэтому в этом случае:

$$\min(k-1, \ldots, k-1, f(\alpha)) = f(\alpha).$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = \max(0, \ldots, 0, f(\alpha), 0, \ldots, 0) = f(\alpha).$$

$\square$

# 1-я форма

**Пример**. Рассмотрим функцию $f(x) = \bar{x} \in P_3$:

| $x$ | $f$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

Запишем ее в 1-й форме:

$$\begin{aligned} f(x) &= \max\left(\min(J_0(x), f(0)), \min(J_1(x), f(1)), \min(J_2(x), f(2))\right) = \\ &= \max\left(\min(J_0(x), 1), \min(J_1(x), 2), \min(J_2(x), 0)\right) = \\ &= \max(\min(J_0(x), 1), J_1(x)). \end{aligned}$$

# 2-я форма

**Теорема 2 (о 2-й форме)** *Пусть* $k \geqslant 2$. *При* $n \geqslant 1$ *каждая функция* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ *может быть представлена в виде:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma).$$

**Доказательство** повторяет доказательство предыдущего утверждения.

# 2-я форма

**Пример**. Рассмотрим функцию $f(x) = J_2(x + x^2) \in P_4$:

| $x$ | $x^2$ | $x + x^2$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 0 | 0 |

Запишем ее во 2-й форме:

$$\begin{aligned} f(x) &= j_0(x) \cdot f(0) + j_1(x) \cdot f(1) + j_2(x) \cdot f(2) + j_3(x) \cdot f(3) = \\ &= j_0(x) \cdot 0 + j_1(x) \cdot 3 + j_2(x) \cdot 3 + j_3(x) \cdot 0 = 3j_1(x) + 3j_2(x). \end{aligned}$$

# 1-я и 2-я формы

**Пример**. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \min(x^2, y) \in P_3$ ($f(x,y)$ указано на пересечении строки $x$ и столбца $y$):

| $x \setminus y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 |

1-я форма для $f$:

$$\begin{aligned} f(x,y) \;&=\; \max(\min(J_1(x), J_1(y), 1), \min(J_1(x), J_2(y), 1), \\ &\quad \min(J_2(x), J_1(y), 1), \min(J_2(x), J_2(y), 1)). \end{aligned}$$

2-я форма для $f$:

$$f(x,y) \;=\; j_1(x)j_1(y) + j_1(x)j_2(y) + j_2(x)j_1(y) + j_2(x)j_2(y).$$

# Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.

2. Марченков С. С. Избранные главы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2016.

3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.