Лекция 1. Универсальная алгебра. Отношения на множестве. Отношение эквивалентности. Операции на множестве. Алгебра. Сохранение функцией отношения. Функции k-значной логики. Существенность переменных.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Декартова (прямая) степень множества

Если A — множество и $n \geqslant 1$, то множество A^n состоит из всех упорядоченных n-ок элементов из A.

Любой элемент из A^n будем называть **набором** (**длины** n). При этом составляющие набор элементы множества A будем называть его **разрядами**, или **компонентами**.

Если a — обозначение некоторого набора из A^n (возможно, с индексами), то i-й разряд набора a будем обозначать a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, т. е. $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

В частности, если $a_j \in A^n$, то $a_j = (a_{j,1}, \ldots, a_{j,n})$.

Отношение

Пусть A — множество и $m \geqslant 1$. Произвольное подмножество A^m называется (m-местным) **отношением** на множестве A.

Т. е. если $\rho \subseteq A^m$, то ρ является m-местным отношением на A.

Отношения

Пусть $\rho \subseteq A^m$ — m-местное отношение на A.

Если $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \rho$, то говорят, что «элементы $a_1, \ldots, a_m$ находятся в отношении ρ» и пишут $\rho(a)$.

Если $a = (a_1, \ldots, a_m) \notin \rho$, то говорят, что «элементы $a_1, \ldots, a_m$ не находятся в отношении ρ» и пишут $\bar{\rho}(a)$.

Двухместные отношения

Отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $\forall x \in A$ верно $\rho(x, x)$;

2) **симметричным**, если $\forall x, y \in A$ из $R(x, y)$ следует $\rho(y, x)$;

3) **транзитивным**, если $\forall x, y, z \in A$ из $\rho(x, y)$ и $\rho(y, z)$ следует $\rho(x, z)$.

Отношение эквивалентности

Отношение $\rho \subseteq A^2$ называется **отношением эквивалентности** (на множестве A), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если ρ — отношение эквивалентности на множестве A, $a, b \in A$ и $\rho(a, b)$, то говорят, что «элементы a и b эквивалентны (по отношению ρ)».

Как правило, отношение эквивалентности обозначают $\sim$.

Класс эквивалентности

Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве A.

Классом эквивалентности (по отношению ρ) по элементу $a \in A$ называется множество всех элементов множества A, которые эквивалентны a .

Класс эквивалентности по элементу a обозначется $[a]_\rho$.

Классы эквивалентности

Предложение 1. *Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве A. Тогда:*

1) *для любых $a, b \in A$ из $\rho(a, b)$ следует $[a]_\rho = [b]_\rho$, т. е. класс эквивалентности порождается любым своим элементом;*

2) *для любых $a, b \in A$ из $\bar{\rho}(a, b)$ следует $[a]_\rho \cap [b]_\rho = \emptyset$, т. е. классы эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.*

Фактор-множество

Следствие 1.1. *Отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно задано, на классы эквивалентности.*

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве A.

Множество классов эквивалентности по отношению ρ называется **фактор-множеством** множества A по отношению ρ и обозначается A/ρ.

Функция на множестве

Пусть A — множество и $n \geqslant 1$. Произвольное отображение из A^n в A называется (n-местной) **операцией** (или **функцией**) на множестве A.

Т. е. если $f : A^n \to A$, то f является n-местной функцией на A.

Любой элемент из A назовем 0-местной операцией (функцией) на множестве A.

Множество всех n-местных функций на множестве A обозначим $P_A^{(n)}$, и $P_A = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} P_A^{(n)}$.

Алгебра

Алгеброй называется пара $(A; F)$, где A — множество, а $F \subseteq P_A$.

Алгебра называется **конечной**, если A — конечное множество.

Если $F = \{f_1, \ldots, f_t\}$, то $(A; F)$ записывают как $(A; f_1, \ldots, f_t)$.

Алгебра $(A; F)$ называется (**функционально**) **полной**, если композициями функций из F можно выразить любую функцию из P_A.

Предикат

Пусть A — множество и $m \geqslant 1$. Отображение $\rho : A^m \to \{0, 1\}$ называется m-местным **предикатом** на множестве A.

Множество всех m-местных предикатов на множестве A обозначим $R_A^{(m)}$, и $R_A = \bigcup\limits_{m \geqslant 1} R_A^{(m)}$.

Предикаты

Пусть $\rho : A^m \to \{0, 1\}$ — m-местный предикат на A.

Если $a = (a_1, \ldots, a_m) \in A^m$ и $\rho(a) = 1$, то говорят, что «предикат ρ выполняется на наборе a» и пишут $\rho(a)$.

Если $a = (a_1, \ldots, a_m) \in A^m$ и $\rho(a) = 0$, то говорят, что «предикат ρ не выполняется на наборе a» и пишут $\bar{\rho}(a)$.

Предикаты и отношения

Произвольному m-местныму предикату ρ можно поставить в соответствие m-местное отношение, содержащее в точности все те наборы из A^m, на которых предикат ρ равен единице.

И, наоборот, произвольному m-местныму отношению ρ можно сопоставить m-местный предикат, равный единице в точности на всех тех наборах из A^m, которые принадлежат отношению ρ.

Поэтому мы будем иногда взаимозаменять понятия отношения и предиката.

Сохранение функцией отношения

Пусть f — n-местная функция и ρ — m-местное отношение на множестве A.

Говорят, что функция f **сохраняет** отношение (предикат) ρ, если для любых $a_1, \ldots, a_m \in A^n$ из $\rho(a_{1,j}, \ldots, a_{m,j})$ для всех $j = 1, \ldots, n$ следует $\rho(f(a_1), \ldots, f(a_m))$

Сохранение функцией отношения

Функция $f \in P_A^{(n)}$ сохраняет отношение (предикат) $\rho \in R_A^{(m)}$, если для любых $a_1, \ldots, a_m \in A^n$ из $\rho(a_{1,j}, \ldots, a_{m,j})$ для всех $j = 1, \ldots, n$ следует $\rho(f(a_1), \ldots, f(a_m))$:

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & & \rho & \rho & & \rho & & \rho \\
a_1 = (& & a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} &) & f(a_1) \\
a_2 = (& & a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} &) & f(a_2) \\
 & & & & \ldots, & & & \\
a_m = (& & a_{m,1}, & a_{m,2}, & \ldots, & a_{m,n} &) & f(a_m)
\end{array}
$$

Полиморфизмы и инварианты

Если функция $f \in P_A$ сохраняет отношение $\rho \in R_A$, то функция f называется **полиморфизмом** отношения ρ, а отношение ρ называется **инвариантным** относительно функции f.

Множество всех функций из P_A, которые сохраняют отношение $\rho \in R_A$, обозначается $\mathrm{Pol}(\rho)$.

Множество всех отношений из R_A, которые сохраняются функцией $f \in P_A$, обозначается $\mathrm{Inv}(f)$.

Множество E_k^n

Пусть $k \geqslant 2$ — целое число, и $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Будем рассматривать множество E_k^n, $n \geqslant 1$. Множество E_k^n будем также называть n-**мерным** k-**значным кубом**.

Ясно, что $|E_k^n| = k^n$.

Любой элемент из E_k^n будем называть **набором**.

Как правило, наборы из множества E_k^n будем обозначать греческими буквами начала алфавита: α, β и т. д., возможно, с индексами.

При этом если $\alpha \in E_k^n$, то $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; если $\alpha_j \in E_2^n$, то $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,n})$.

Лексико-графический порядок на E_k^n

Номером $\|\alpha\|$ набора $\alpha \in E_2^n$ назовем целое неотрицательное число, для которого запись в k-ичной системе счисления имеет вид $\alpha_1 \dots \alpha_n$.

Другими словами,

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot k^{n-i}.$$

Отметим, что $0 \leqslant \|\alpha\| \leqslant k^n - 1$.

(Линейное) упорядочивание наборов из E_k^n в порядке возрастания их номеров назовем **лексико-графическим** (или **алфавитным**) порядком на E_k^n.

Функции k-значной логики

Пусть $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, где $k \geqslant 2$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$, $n \geqslant 1$, называется (n-местной) **функцией k-значной логики**, или **k-значной функцией**, если

$$f : E_k^n \to E_k.$$

Константы $0, 1, \dots, k-1$ назовем 0-местными k-значными функциями.

Множество всех n-местных k-значных функций обозначим $P_k^{(n)}$, и $P_k = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} P_k^{(n)}$.

При $k \geqslant 3$ функции k-значной логики называются **функциями многозначной логики**.

Таблицы значений

Функции k-значной логики можно задавать таблицами значений.

Упорядочим все наборы множества E_k^n в *лексико-графическом* порядке и сопоставим каждому набору значение функции на нем:

x_1	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\dots$	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	$\dots$	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
	$\dots$			
0	$\dots$	0	$k-1$	$f(0, \dots, 0, k-1)$
	$\dots$			
$k-1$	$\dots$	$k-1$	0	$f(k-1, \dots, k-1, 0)$
	$\dots$			
$k-1$	$\dots$	$k-1$	$k-2$	$f(k-1, \dots, k-1, k-2)$
$k-1$	$\dots$	$k-1$	$k-1$	$f(k-1, \dots, k-1, k-1)$

Функции k-значной логики

Рассмотрим некоторые важные k-значные функции:

1. $n = 0$: **константы** $0, 1, \ldots, k-1$.

2. $n = 1$:

1) x — **тождественно равная** x;

2) $\bar{x} = x + 1 (\mathrm{mod}\ k)$ — **отрицание Поста** x;

3) $\sim x = (k-1) - x$ — **отрицание Лукасевича** x;

4) $-x = k - x (\mathrm{mod}\ k)$ — **минус** x:

x	x	$\bar{x}$	$\sim x$	$-x$
0	0	1	$k-1$	0
1	1	2	$k-2$	$k-1$
$\ldots$				
$k-2$	$k-2$	$k-1$	1	2
$k-1$	$k-1$	0	0	1

Функции k-значной логики

5) **характеристические функции** $J_i(x)$, $j_i(x)$, где $i \in E_k$:

$$J_i(x) = \begin{cases} k-1, & x = i, \\ 0, & x \neq i, \end{cases} \quad j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i, \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

Функции k-значной логики

3. $n = 2$:

1) $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ — сложение, вычитание и умножение по модулю k;

2) $\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \leqslant y, \\ y, & x > y, \end{cases}$ — минимум из x и y;

3) $\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geqslant y, \\ y, & x < y, \end{cases}$ — максимум из x и y.

4) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geqslant y, \\ 0, & x < y, \end{cases}$ — усеченная разность;

5) $x \to y = \begin{cases} k - 1, & x \leqslant y, \\ (k - 1) - (x - y), & x > y, \end{cases}$ — импликация.

Функции k-значной логики

4. обобщения:

1) $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \ldots, x_n))$;

2) $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \ldots, x_n))$;

3) $x^s = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{s}$ — степень, $s \geqslant 1$.

Функции k-значной логики

Каким функциям алгебры (двузначной) логики соответствуют функции k-значной логики при $k \geqslant 3$?

n	$P_k, k \geqslant 3$	P_2
$n = 0$	$0, 1, \ldots, k-1$	$0, 1$
$n = 1$	x	x
	$\bar{x}, \sim x$	$\bar{x}$
	$J_0(x), j_0(x)$	$\bar{x}$
	$J_{k-1}(x), j_{k-1}(x)$	x
$n = 2$	$\min(x, y)$	$x \& y$
	$\max(x, y)$	$x \vee y$
	$x + y$	$x \oplus y$
	$x \cdot y$	$x \cdot y$

Функции k-значной логики

В k-значной логике аналогично двузначной логике вводятся понятия существенной и несущественной переменных, равенства функций с точностью до несущественных переменных; понятия формулы над множеством функций и функции, определяемой формулой.

Существенные и несущественные переменные

Переменная x_i называется **существенной** для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, если найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in E_k$, что

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq Const.$$

Т. е. переменная x_i является существенной, если все другие переменные можно так определить, что полученная функция одной переменной x_i принимает хотя бы два различных значения.

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

Несущественные переменные можно удалять и добавлять, при этом получается функция, равная исходной, но зависящая от другого множества переменных.

Равенство и конгруэнтность функций

Функции f и g называются **равными**, если конечным числом удалений или добавлений несущественных переменных их можно сделать совпадающими.

Функции f и g называются **конгруэнтными**, если равные им функции отличаются только именами переменных.

Примеры.

1. Функции $f_1(x) = 0$ и $f_2 = 0$ равны.

2. Функции $g(x) = x$ и $h(y) = y$ конгруэнтны.

Число k-значных функций n переменных

Предложение 2. *Пусть $k \geqslant 2$. При $n \geqslant 1$ верно равенство:* $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

Доказательство.

Каждую функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^{(n)}$ можно задать таблицей с k^n строками.

В каждой строке этой таблицы — значение этой функции на соответствующем наборе из k возможных значений из E_k.

При этом разные таблицы определяют различные функции.

Поэтому $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

$\square$

Литература к лекции

1. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. Springer, 2006.

2. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.

3. Марченков С. С. Избранные главы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2016.

4. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.