

Лекция 1. Конечнзначные функции.

Элементарные k -значные функции. Способы задания k -значных функций: таблицы, формулы, 1-я и 2-я формы, полиномы. Полнота. Теорема о полноте системы Поста. Функция Вебба.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Конечнозначные функции

Пусть $k \geq 2$ — целое число, $E_k = \{0, 1, \dots, k - 1\}$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется k -значной, если

$$f : E_k^n \rightarrow E_k,$$

где $n = 1, 2, \dots$

Множество всех k -значных функций обозначим как P_k , множество всех k -значных функций, зависящих от переменных x_1, \dots, x_n , обозначим как $P_k^{(n)}$.

При $k = 2$ функции называются функциями *алгебры логики*, или *булевыми* функциями, при $k \geq 3$ — *многозначными* функциями.

Аналогично двузначному случаю равенство многозначных функций ($k \geq 3$) рассматривается с точностью до несущественных (фиктивных) переменных.

Существенные и несущественные переменные

Переменная x_i называется **существенной** для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, если найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in E_k$, что

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq \text{Const}.$$

Т.е. переменная x_i является существенной, если все другие переменные можно так определить, что полученная функция одной переменной x_i принимает хотя бы два различных значения.

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

Несущественные переменные можно удалять и добавлять, при этом получается функция, равная исходной, но зависящая от другого набора переменных.

Равенство и конгруэнтность функций

Функции f и g называются **равными**, если конечным числом удалений или добавлений несущественных переменных их можно сделать совпадающими.

Функции f и g называются **конгруэнтными**, если равные им функции отличаются только именами переменных.

Примеры.

1. Функции $f_1(x) = 0$ и $f_2 = 0$ равны.
2. Функции $g(x) = x$ и $h(y) = y$ конгруэнтны.

Применение

Конечнозначные функции применяются для построения моделей решения прикладных задач, в которых можно выделить исходное множество, состоящее из конечного числа элементов.

Не столь широкое применение k -значных функций при $k \geq 3$ по сравнению с двузначными связано, в первую очередь, с физической реализацией вычислительной техники на двузначной основе.

Проводятся исследования, относящиеся к разработке физических схем, построенных на многозначных функциях; существуют промышленные цифровые устройства на многозначной основе.

Таблицы значений

Как можно задавать k -значные функции?

1. Таблицы значений.

Упорядочим все наборы множества E_k^n в *лексико-графическом*, или *алфавитном* порядке (в алфавите $0, 1, \dots, k-1$), сопоставим каждому набору значение функции на нем.

x_1	\dots	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	\dots	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	\dots	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
	\dots			
0	\dots	0	$k-1$	$f(0, \dots, 0, k-1)$
	\dots			
$k-1$	\dots	$k-1$	0	$f(k-1, \dots, k-1, 0)$
	\dots			
$k-1$	\dots	$k-1$	$k-2$	$f(k-1, \dots, k-1, k-2)$
$k-1$	\dots	$k-1$	$k-1$	$f(k-1, \dots, k-1, k-1)$

Число k -значных функций

Теорема 1. Пусть $k \geq 2$. При $n \geq 1$ верно $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

Доказательство.

Каждую функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k^{(n)}$ можно задать таблицей с k^n строками.

В каждой строке этой таблицы — значение этой функции на соответствующем наборе из k возможных значений из E_k .

При этом разные таблицы определяют различные функции.

Поэтому $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.



Элементарные функции

2. Формулы.

Элементарные k -значные функции ($k \geq 3$).

$n = 0$:

константы $0, 1, \dots, k - 1$.

$n = 1$:

x	x	\bar{x}	$\sim x$	$-x$
0	0	1	$k - 1$	0
1	1	2	$k - 2$	$k - 1$
...				
$k - 2$	$k - 2$	$k - 1$	1	2
$k - 1$	$k - 1$	0	0	1

x — тождественно x ;

$\bar{x} = x + 1(\text{mod } k)$ — отрицание Поста x ;

$\sim x = (k - 1) - x$ — отрицание Лукасевича x ;

$-x = k - x(\text{mod } k)$ — минус x .

Элементарные функции

Характеристические функции выделенного значения $J_i(x)$, $j_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, k - 1$:

$$J_i(x) = \begin{cases} k - 1, & x = i, \\ 0, & x \neq i; \end{cases}$$

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i, \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

Элементарные функции

$n = 2$:

$x + y \pmod k$, $x - y \pmod k$, $x \cdot y \pmod k$ — сложение, вычитание и умножение по модулю k ;

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq y, \\ y, & x > y, \end{cases} \quad \text{— минимум из } x \text{ и } y;$$

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geq y, \\ y, & x < y, \end{cases} \quad \text{— максимум из } x \text{ и } y;$$

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 0, & x < y, \end{cases} \quad \text{— усеченная разность};$$

$$x \rightarrow y = \begin{cases} k - 1, & x \leq y, \\ (k - 1) - (x - y), & x > y, \end{cases} \quad \text{— импликация.}$$

обобщения:

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \dots, x_n));$$

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \dots, x_n));$$

$$x^m = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_m \quad \text{— степень.}$$

Элементарные функции

Как двузначные функции обобщаются на многозначные функции?

n	P_2	$P_k, k \geq 3$	пояснения
$n = 0$	0, 1	0, 1, ..., $k - 1$	константы
$n = 1$	x \bar{x}	x $\bar{x}, \sim x$	тождественная функция отрицание
$n = 2$	$x \& y$ $x \vee y$ $x \oplus y$ $x \rightarrow y$	$\min(x, y)$ $\max(x, y)$ $x + y \pmod k$ $x \rightarrow y$	конъюнкция или минимум дизъюнкция или максимум сложение по модулю k импликация

В связи с расширением исходного множества значений появляются элементарные функции, не имеющие явного элементарного прообраза в двузначном случае: $-x$, $J_i(x)$, $j_i(x)$, $x \dot{-} y$.

Формула

Понятия *формулы* и *функции, определяемой формулой*, вводятся аналогично двузначному случаю.

Пусть $A \subseteq P_k$, причем каждая функция из A имеет свое, отличное от других функций, обозначение.

Формула над множеством A определяется по индукции.

1. *Базис индукции.* Если f — обозначение n -местной функции из A и x_{i_1}, \dots, x_{i_n} — набор из n (не обязательно различных) переменных, то выражение $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ — формула.

2. *Индуктивный переход.* Если F_1, \dots, F_n — уже построенные формулы или переменные и f — обозначение n -местной функции из A , то выражение $f(F_1, \dots, F_n)$ — формула.

3. Других формул нет, т.е. каждая формула построена либо по базису индукции, либо по индуктивному переходу.

Формулы

Пример. Пусть $A \subseteq P_5$ — множество элементарных функций.

Тогда

$$F_1 = x^2$$

формула по базису индукции для функции $x^2 \in A$ и переменной x ;

$$F_2 = 3$$

формула по базису индукции для функции $3 \in A$;

$$F_3 = 3 \cdot x^2$$

формула по индуктивному переходу для уже построенных формул F_1 , F_2 и функции $x \cdot y \in A$;

$$F_4 = \sim (3 \cdot x^2)$$

формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы F_3 и функции $\sim x \in A$;
и т.д.

Функция, определяемая формулой

Каждая формула над множеством $A \subseteq P_k$ задает некоторую k -значную функцию.

Функция f_F , задаваемая формулой F , определяется по индукции.

1. *Базис индукции.* Если $F = x$, где x — переменная, то $f_F = x$, т.е. функция f_F тождественно равна переменной x .

2. *Индуктивный переход.* Если $F = f(F_1, \dots, F_n)$, где F_1, \dots, F_n — формулы или переменные и f — обозначение n -местной функции из A , то $f_F = f(f_{F_1}, \dots, f_{F_n})$. Здесь мы пользуемся тем, что f обозначает какую-то функцию из A .

Функции, определяемые формулами

Пример. Найдем функцию $f_{F_4}(x) \in P_5$, которая задается формулой F_4 :

x	x^2	$3 \cdot x^2$	$\sim (3 \cdot x^2)$
0	0	0	4
1	1	3	1
2	4	2	3
3	4	2	3
4	1	3	1

Функция f_{F_4} , определяемая формулой F_4 , записана в самом правом столбце.

Тождественные формулы

Формулы F_1 и F_2 называются **эквивалентными**, или **тождественными**, если они определяют равные функции, т.е. функции f_{F_1} и f_{F_2} равны.

Обозначение тождественных формул: $F_1 = F_2$

Верны следующие свойства:

- 1) коммутативность связок \cdot , $+$, \min , \max ;
- 2) ассоциативность связок \cdot , $+$, \min , \max ;
- 3) дистрибутивность умножения относительно сложения:
 $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

И многие другие.

Доказательство тождеств

Примеры.

1. Докажем тождество: $-(\bar{x}) = \sim x$.

$$-(\bar{x}) = -(x + 1) = (k - 1) - x = \sim x.$$

2. Докажем тождество: $\sim \max(\sim x, \sim y) = \min(x, y)$.

$$\begin{aligned} & \sim \max(\sim x, \sim y) = \\ & = (k - 1) - \begin{cases} (k - 1) - x, & (k - 1) - x \geq (k - 1) - y, \\ (k - 1) - y, & (k - 1) - x < (k - 1) - y, \end{cases} = \\ & = \begin{cases} x, & x \leq y, \\ y, & x > y, \end{cases} = \min(x, y). \end{aligned}$$

1-я форма

Теорема 2 (о 1-й форме). Пусть $k \geq 2$. Каждая k -значная функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ может быть задана формулой вида:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \max_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} \min(J_{\sigma_1}(x_1), \dots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma)).$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный набор $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \max_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} \min(J_{\sigma_1}(a_1), \dots, J_{\sigma_n}(a_n), f(\sigma)) = \\ &= \max(0, \dots, 0, f(\alpha), 0, \dots, 0) = f(\alpha). \end{aligned}$$

□

1-я форма

Пример.

Пусть $f(x) = \bar{x} \in P_3$:

x	f
0	1
1	2
2	0

Найдем ее 1-ю форму:

$$\begin{aligned} f(x) &= \max(\min(J_0(x), f(0)), \min(J_1(x), f(1)), \min(J_2(x), f(2))) = \\ &= \max(\min(J_0(x), 1), \min(J_1(x), 2), \min(J_2(x), 0)) = \\ &= \max(\min(J_0(x), 1), J_1(x)). \end{aligned}$$

2-я форма

Теорема 3 (о 2-й форме) Пусть $k \geq 2$. Каждая k -значная функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ может быть задана формулой вида:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \dots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma).$$

2-я форма

Пример. Пусть $g(x) = J_2(x + x^2) \in P_4$:

x	x^2	$x + x^2$	g
0	0	0	0
1	1	2	3
2	0	2	3
3	1	0	0

Найдем ее 2-ю форму:

$$\begin{aligned}g(x) &= j_0(x) \cdot g(0) + j_1(x) \cdot g(1) + j_2(x) \cdot g(2) + j_3(x) \cdot g(3) = \\ &= j_0(x) \cdot 0 + j_1(x) \cdot 3 + j_2(x) \cdot 3 + j_3(x) \cdot 0 = 3j_1(x) + 3j_2(x).\end{aligned}$$

Моном

Формула вида

$$x_{i_1}^{s_1} \cdot \dots \cdot x_{i_r}^{s_r},$$

где все переменные различны и $s_1, \dots, s_r \geq 1$, называется *мономом*.

Число его сомножителей r , $r \geq 1$, называется его *рангом*,

сумма степеней его сомножителей $s = \sum_{i=1}^r s_i$, $s \geq 1$, называется его *степенью*.

По определению будем считать константу 1 мономом ранга $r = 0$ и степени $s = 0$.

Мономы считаются совпадающими, если они отличаются только порядком своих сомножителей.

Полином

Формула вида

$$c_1 K_1 + \dots + c_l K_l,$$

где K_1, \dots, K_l — различные мономы и $c_1, \dots, c_l \in E_k \setminus \{0\}$ — коэффициенты называется **полиномом по модулю k** .

Число l , $l \geq 1$, его слагаемых K_i называется его *длиной*.

По определению будем считать константу 0 (пустым) полиномом по модулю k с длиной $l = 0$.

Полиномы, отличающиеся только порядком своих слагаемых, считаем совпадающими.

Примем, что в полином можно добавлять слагаемые с нулевыми коэффициентами. Полученное выражение (формулу) будем также называть полиномом. Будем считать, что такой полином совпадает с полиномом без всех слагаемых с нулевыми коэффициентами.

Полиномы

Теорема 4 (о представлении k -значных функций полиномами по модулю k) Пусть $k \geq 2$. Каждая k -значная функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ задается полиномом по модулю k тогда и только тогда, когда k — простое число.

Полиномы

Доказательство.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$. Запишем ее во 2-й форме:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \dots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma).$$

Заметим, что $j_i(x) = j_0(x - i)$ при $i \in E_k$. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} j_0(x_1 - \sigma_1) \cdot \dots \cdot j_0(x_n - \sigma_n) \cdot f(\sigma).$$

Полиномы

Доказательство.

1. Если k — простое число, то по малой теореме Ферма $a^{k-1} = 1 \pmod{k}$ при $1 \leq a \leq k-1$.

Поэтому $j_0(x) = 1 - x^{k-1}$ и

$$f(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} (1 - (x_1 - \sigma_1)^{k-1}) \cdot \dots \cdot (1 - (x_n - \sigma_n)^{k-1}) \cdot f(\sigma).$$

Затем перемножаем скобки по свойствам дистрибутивности, коммутативности и ассоциативности; приводим подобные слагаемые. Получим полином по модулю k для функции f .

Т.е. существование полинома по модулю k для каждой k -значной функции при простых k доказано.

Полиномы

Доказательство.

2. Пусть k — составное число. Тогда $k = k_1 \cdot k_2$, где $k_1 \geq k_2 > 1$.

Докажем от противного, что в этом случае функция $j_0(x)$ не задается полиномом по модулю k .

Полиномы

Доказательство.

Предположим, что функция $j_0(x)$ задается полиномом по модулю k :

$$j_0(x) = c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \dots + c_1 x + c_0,$$

где $c_s, c_{s-1}, \dots, c_1, c_0 \in E_k$ — коэффициенты, $c_s \neq 0$.

Тогда $j_0(0) = c_0 = 1$ и

$$j_0(k_1) = c_s k_1^s + c_{s-1} k_1^{s-1} + \dots + c_1 k_1 + 1 = 0.$$

Поэтому

$$k_1 \cdot (c_s k_1^{s-1} + c_{s-1} k_1^{s-2} + \dots + c_1) = k - 1 \pmod{k}.$$

Т.к. число k_1 — делитель числа k , число $k - 1$ обязано делиться на $k_1 > 1$ — противоречие.

Т.е. при составных k никакой полином по модулю k не задает функцию $j_0(x)$.

Полиномиальные функции

Элементарные функции

$$x,$$

$$\bar{x} = x + 1,$$

$$\sim x = (k - 1) - x = (k - 1)x + (k - 1),$$

$$-x = k - x = (k - 1)x,$$

$$x + y,$$

$$x - y = x + (k - 1)y,$$

$$x \cdot y,$$

$$x^m$$

являются полиномиальными при всех значениях k — и простых, и составных.

Неполиномиальные функции

Элементарные функции

$$j_i(x), i \in E_k,$$

$$J_i(x), i \in E_k,$$

$$\max(x, y),$$

$$\min(x, y),$$

$$x \dot{-} y,$$

$$x \rightarrow y$$

являются полиномиальными при простых k и **не являются** полиномиальными при всех составных k (будет доказано далее).

Полиномиальные функции

Множество всех k -значных функций, задающихся полиномами по модулю k , обозначается как Pol_k .

Следствие 4.1.

*Если k — простое число, то $Pol_k = P_k$;
если k — составное число, то $Pol_k \neq P_k$.*

Вопросы:

Как строить полиномы для k -значных функций при простых k ?

Как выяснить, задается ли полиномом заданная k -значная функция, если k — составное?

Если k — простое число

Методы построения полиномов k -значных функций при простых k :

1. метод из доказательства теоремы 4 — по 2-й форме;
2. метод *неопределенных коэффициентов*;

Если k — составное число

Если k — составное число, то можно применять метод *неопределенных коэффициентов* для выяснения, задается ли данная k -значная функция полиномом по модулю k .

Если k — составное число

Примеры.

1. Пусть $f(x) = J_1(x) + J_2(x) \in P_4$.

Выясним, задается ли функция $f(x) \in P_4$ полиномом по модулю 4 методом *неопределенных коэффициентов*.

Предположим, что функция $f(x)$ задается полиномом по модулю 4.

Сначала построим таблицу степеней x^s :

x	x^2	x^3	x^4
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	1

Т.к. $x^4 = x^2$, степени в полиноме по модулю 4 можно записывать только до третьей.

Если k — составное число

Тогда

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где $a, b, c, d \in E_4$ — неизвестные коэффициенты.

Для определения коэффициентов составим систему уравнений по значениям данной функции $f(x) = J_1(x) + J_2(x) \in P_4$:

$$f(0) = d = 0,$$

$$f(1) = a + b + c + d = 3,$$

$$f(2) = 2c + d = 3,$$

$$f(3) = 3a + b + 3c + d = 0.$$

Если k — составное число

Из первого и третьего уравнения получаем:

$$2c = 3.$$

Подставляя все возможные значения $c \in E_4$, выясняем, что равенство не выполняется ни при каких значениях $c \in E_4$:

$$2 \cdot 0 = 0, \quad 2 \cdot 1 = 2, \quad 2 \cdot 2 = 0, \quad 2 \cdot 3 = 2.$$

Следовательно, система не имеет решений (по модулю 4), и

$$f(x) = J_1(x) + J_2(x) \notin Pol_4.$$

Если k — составное число

2. Пусть $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2(J_1(x) + J_2(x)) \in P_4$.

Аналогично, выясним, задается ли функция $g(x) \in P_4$ полиномом по модулю 4.

Тогда

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где $a, b, c, d \in E_4$ — неизвестные коэффициенты.

Составляем систему уравнений:

$$g(0) = d = 0,$$

$$g(1) = a + b + c + d = 2,$$

$$g(2) = 2c + d = 2,$$

$$g(3) = 3a + b + 3c + d = 0.$$

Если k — составное число

Из первого и третьего уравнения получаем:

$$2c = 2,$$

и $c = 1$ — одно из решений этого уравнения. Тогда

$$\begin{aligned}a + b &= 1, \\ 3a + b &= 1,\end{aligned}$$

и $a = 0$, $b = 1$ — одно из решений этой системы уравнений.

Следовательно, функция $g(x)$ задается полиномом по модулю 4, и найден один из ее полиномов по модулю 4:

$$g(x) = 2(J_1(x) + J_2(x)) = x^2 + x \in Pol_4.$$

Операция замыкания

Пусть $A \subseteq P_k$ — множество k -значных функций.

Замыканием множества A называется множество всех функций, определяемых формулами над множеством A .
Обозначение: $[A]$.

Если $A = [A]$, то множество A называется **замкнутым классом**.

Примеры: \emptyset , P_k , Pol_k .

Полные системы

Если $[A] = P_k$, то множество A называется **полной системой**.

Примеры.

1. $\{0, 1, \dots, k-1, J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x), \max(x, y), \min(x, y)\}$ — система 1-й формы.
2. $\{0, 1, \dots, k-1, j_0(x), j_1(x), \dots, j_{k-1}(x), x+y, x \cdot y\}$ — система 2-й формы.
3. $\{0, 1, \dots, k-1, x+y, x \cdot y\}$ при простых k — система полиномов.

Система Поста

Теорема 5. Пусть $k \geq 3$. Система Поста $\{\bar{x}, \max(x, y)\}$ является полной системой в P_k .

Доказательство. Построим формулами над системой Поста все функции из системы 1-й формы.

1. Построение констант.

$\bar{x} = x + 1$; $(x + 1) + 1 = x + 2$; ...; $(x + (k - 1)) + 1 = x$. Тогда

$$\max(x, x + 1, x + 2, \dots, x + (k - 1)) = k - 1.$$

Далее $(k - 1) + 1 = 0$; $0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 2$; ...;
 $(k - 2) + 1 = k - 1$.

Т.е. все константы получены.

Система Поста

Доказательство.

2. Построение $J_i(x)$, $i \in E_k$.

Проверим, что

$$J_i(x) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (x + t).$$

Если $x = i$, то

$$k - 1 = J_i(i) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (i + t) = 1 + (k - 2) = k - 1.$$

Если $x \neq i$, то

$$0 = J_i(x) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (x + t) = 1 + (k - 1) = 0.$$

Т.е. все $J_i(x)$, $i \in E_k$, получены.

Система Поста

.
Доказательство.

3. Построение $\min(x, y)$.

Рассмотрим функции $g_{i,a}(x) = a \cdot j_i(x)$, где $a, i \in E_k$. Проверим, что

$$g_{i,a}(x) = (a + 1) + \max(J_i(x), (k - 1) - a).$$

Если $x = i$, то

$$a = a \cdot j_i(i) = (a + 1) + \max(J_i(i), (k - 1) - a) = (a + 1) + (k - 1) = a.$$

Если $x \neq i$, то

$$0 = a \cdot j_i(x) = (a + 1) + \max(J_i(x), (k - 1) - a) = (a + 1) + (k - 1) - a = 0.$$

Система Поста

Доказательство.

Тогда получена каждая функция $f(x) \in P_k^{(1)}$, т.к.

$$f(x) = \max(g_{0,f(0)}(x), g_{1,f(1)}(x), \dots, g_{k-1,f(k-1)}(x)).$$

Действительно, для каждого значения $b \in E_k$ верно

$$\begin{aligned} f(b) &= \max(g_{0,f(0)}(b), \dots, g_{b,f(b)}(b), \dots, g_{k-1,f(k-1)}(b)) = \\ &= \max(0, \dots, 0, f(b), 0, \dots, 0) = f(b). \end{aligned}$$

В частности, получена функция $f(x) = \sim x$.

Тогда

$$\min(x, y) = \sim \max(\sim x, \sim y).$$

Т.е. функция $\min(x, y)$ получена.

Все функции системы 1-й формы построены формулами над функциями системы Поста. Т.е. система Поста полна.

Функция Вебба

Следствие 5.1. Пусть $k \geq 3$. Множество, состоящее из одной функции Вебба $V_k(x, y) = \max(x, y) + 1$, является полной системой в P_k .

Доказательство. Построим из функции Вебба функции из системы Поста:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= V_k(x, x) = \max(x, x) + 1 = x + 1, \\ \max(x, y) &= V_k(x, y) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{k-1}.\end{aligned}$$



Неполиномиальность максимума

Следствие 5.2. Если k — составное число, то $\max(x, y) \notin Pol_k$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\max(x, y) \in Pol_k$ при некотором составном k .

Но $\bar{x} = x + 1 \in Pol_k$, поэтому $\{\bar{x}, \max(x, y)\} \subseteq Pol_k$.

Система Поста полна в P_k , следовательно, каждая функция из P_k задается полиномом по модулю k при составном k — противоречие.

Значит, $\max(x, y) \notin Pol_k$.



Бесконечные полные системы в P_k

Следствие 5.3. *Из каждой бесконечной полной в P_k системы можно выделить конечную полную подсистему.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq P_k$ — бесконечная полная система.

Т.к. система A — полна, в ней найдутся функции такие g_1, \dots, g_t , что функция Вебба $V_k(x, y)$ выражается формулой над ними.

Тогда подсистема $A' = \{g_1, \dots, g_t\}$ полна в P_k .

□

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. I, гл. 2, стр. 43–50.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. III 1.1, 1.11, 1.12, 2.7, 2.12, 2.22.

Конец лекции