

# Математическая логика и логическое программирование

[mk.cs.msu.ru](http://mk.cs.msu.ru) → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 25

Теорема Эрбрана

Полнота резолютивного вывода

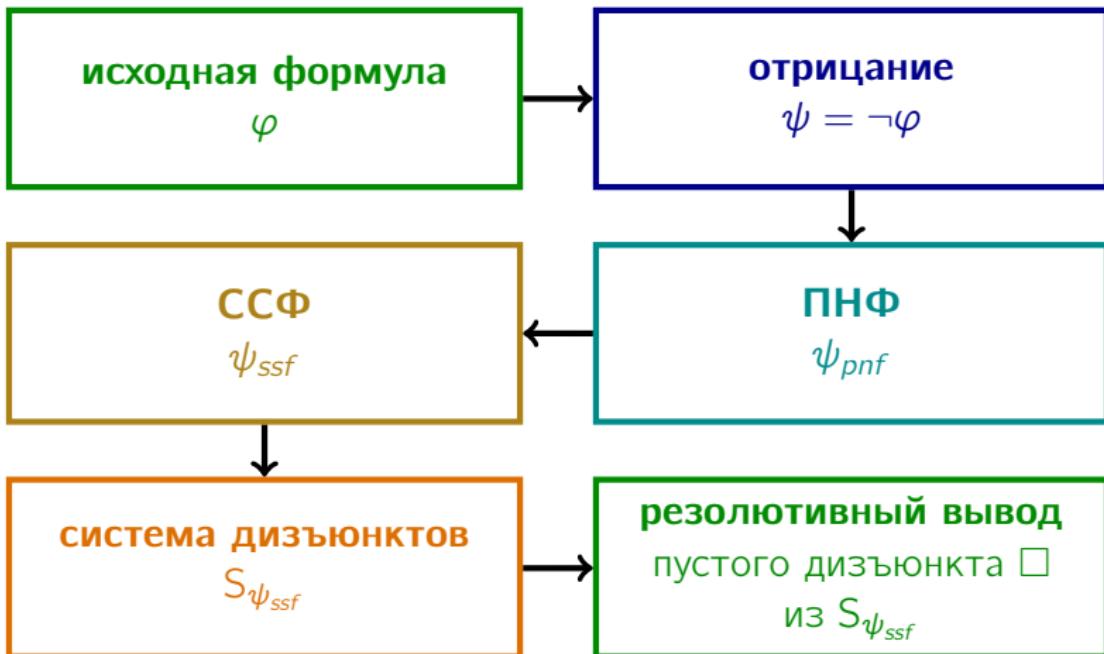
Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь



$$\begin{array}{c}
 \models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}} \\
 \Leftarrow \text{существует вывод } \square \text{ из } S_{\psi_{ssf}}
 \end{array}$$

Покажем, что результативный вывод **полон**:  
 справедливо не только « $\Leftarrow$ », но и « $\Rightarrow$ »

# Общая схема обоснования полноты

Рассмотрим невыполнимую систему дизъюнктов  $S$

Резолютивная выводимость  $\square$  из  $S$  будет обоснована так:

1. Существует конечное невыполнимое множество  $\mathcal{G}$  основных примеров дизъюнктов из  $S$  (теорема Эрбрана)
2. Существует резолютивный вывод  $\square$  из  $\mathcal{G}$  (лемма об основных дизъюнктах)
3. Каждый шаг вывода  $\square$  из  $\mathcal{G}$  можно преобразовать в «аналогичный» шаг вывода из  $S$  (две леммы о подъёме)
4. Следовательно, весь вывод  $\square$  из  $\mathcal{G}$  можно преобразовать в вывод  $\square$  из  $S$  (теорема о полноте резолютивного вывода)

# Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов невыполнима

$\Leftrightarrow$

существует конечное невыполнимое множество  
основных примеров дизъюнктов этой системы

## Теорема Эрбрана (доказательство)

Система дизъюнктов  $S$  (сигнатуры  $\sigma$ ) невыполнима

$\Leftrightarrow$  (теорема об эрбановских интерпретациях)

$S$  не выполняется ни в одной  $\mathcal{H}$ -интерпретации

$\Leftrightarrow$  (определение выполнимости и семантика квантора  $\forall$ )

Для каждой  $\mathcal{H}$ -интерпретации  $\mathcal{I}$  существуют дизъюнкт  $\forall \tilde{x}^n D \in S$  и предметы  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$ , такие что  $\mathcal{I} \not\models D[t_1, \dots, t_n]$

$\Leftrightarrow$  (устройство  $\mathcal{H}$ -интерпретаций)

Для каждой  $\mathcal{H}$ -интерпретации  $\mathcal{I}$  существует основной пример  $D'$  дизъюнкта  $D \in S$ , такой что  $\mathcal{I} \not\models D'$

$\Leftrightarrow$  (то же другими словами)

Множество  $\mathcal{G}_S$  всех основных примеров дизъюнктов из  $S$  не выполняется ни в одной  $\mathcal{H}$ -интерпретации

$\Leftrightarrow$  (теорема об эрбановских интерпретациях)

Система  $\mathcal{G}_S$  невыполнима

## Теорема Эрбрана (доказательство)

Вспомним следствие из теоремы компактности Мальцева:

$$\not\models \Gamma \Leftrightarrow$$

существует конечное невыполнимое подмножество  $\Gamma'$  множества  $\Gamma$

Применим это следствие к множеству  $\mathcal{G}_S$ :

$$\not\models S \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \not\models \mathcal{G}_S$$

$\Leftrightarrow$

существует **конечное** невыполнимое подмножество  $\mathcal{G}$  множества  $\mathcal{G}_S$  ▼

## Лемма об основных дизъюнктах

Из любой конечной невыполнимой системы основных дизъюнктов резолютивно выводим пустой дизъюнкт

Доказательство.

Рассмотрим произвольную конечную невыполнимую систему основных дизъюнктов  $S$

Докажем лемму индукцией по числу  $\|S\|$  различных атомов, содержащихся в дизъюнктах из  $S$

База:  $\|S\| = 0$

$$\nVdash S \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S \neq \emptyset \\ \|S\| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S = \{\square\} \Rightarrow \square \text{ резолютивно выводим из } S$$

## Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход:  $\Vdash S, \|S\| = N > 0; \quad S \rightsquigarrow ? \square$

Индуктивное предположение:  $\Vdash \tilde{S}$  и  $\|\tilde{S}\| < N \Rightarrow \tilde{S} \rightsquigarrow \square$

Перейдём от  $S$  к системе дизъюнктов  $S'$ ,  
удалив все дизъюнкты вида  $D \vee A \vee \neg A$

$\Vdash S$ , и все удаляемые дизъюнкты общезначимы,  
а значит,  $\Vdash S'$ , и достаточно предложить вывод  $\square$  из  $S'$

Перейдём от  $S'$  к системе  $S''$  так: пока это возможно,  
будем заменять дизъюнкты вида  $D \vee L \vee L$  на их склейки  $D \vee L$

$\Vdash S'$ , и дизъюнкты заменяются на равносильные выводимые  
а значит,  $\Vdash S''$ , и достаточно предложить вывод  $\square$  из  $S''$

Если  $\|S''\| < N$ , то обоснование завершено

Предположим теперь, что  $\|S''\| = N$

## Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход:  $\not\models S''$ ,  $\|S''\| = N > 0$ ,

и в  $S''$  нет дизъюнктов вида  $D \vee L \vee \neg L$  и  $D \vee L \vee L$ ;  $S'' \rightsquigarrow ? \square$

Индуктивное предположение:  $\not\models \tilde{S}$ ,  $\|\tilde{S}\| < N \Rightarrow \tilde{S} \rightsquigarrow \square$

Произвольно выберем атом  $A$ ,  
содержащийся хотя бы в одном дизъюнкте из  $S''$

Разобьём  $S''$  на три множества:

- ▶  $S_+$  — все дизъюнкты из  $S''$ , содержащие  $A$  без отрицания
- ▶  $S_-$  — все дизъюнкты из  $S''$ , содержащие  $\neg A$
- ▶  $S_x$  — все остальные дизъюнкты из  $S''$

Построим все резольвенты по контрапротивной паре  $A, \neg A$ :

$$S_r = \{D_1 \vee D_2 \mid D_1 \vee A \in S_+, D_2 \vee \neg A \in S_-\}$$

Достаточно показать, что  $\square$  выводим из системы  $S''' = S_r \cup S_x$

$\|S'''\| = \|S''\| - 1 = N - 1 < N$ , а значит, по предположению индукции,  
достаточно обосновать соотношение  $\not\models S'''$

# Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход:

$$\models S'': S_+ \boxed{\dots D_+ \vee A \dots}$$

$$S_- \boxed{\dots D_- \vee \neg A \dots}$$

$$S_x \boxed{\text{дизъ. без } A}$$

$$\models? S''':$$

$$S_r \boxed{\dots D_+ \vee D_- \dots}$$

$$S_x \boxed{\text{дизъ. без } A}$$

Рассмотрим произвольную  $\mathcal{H}$ -интерпретацию  $\mathcal{I}$

По теореме об эрбрановских интерпретациях,  
достаточно обосновать соотношение  $\mathcal{I} \not\models S'''$

Так как система  $S''$  невыполнима, верно  $\mathcal{I} \not\models S''$

*Случай 1:*  $\mathcal{I} \not\models S_x$ . Так как  $S_x \subseteq S'''$ , верно и  $\mathcal{I} \not\models S'''$

*Случай 2:*  $\mathcal{I} \models S_x, A \in \mathcal{I}$

$$A \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I} \models S_+$$

$$\mathcal{I} \models S_+ \cup S_x \text{ и } \mathcal{I} \not\models S_+ \cup S_x \cup S_- \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S_-$$

$\Rightarrow$  в  $S_-$  содержится дизъюнкт  $D_- \vee \neg A$ , такой что  $\mathcal{I} \not\models D_- \vee \neg A$

$$\Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_-$$

# Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход:

$$\models S'': S_+ \boxed{\dots D_+ \vee A \dots}$$

$$S_- \boxed{\dots D_- \vee \neg A \dots}$$

$$S_x \boxed{\text{дизъ. без } A}$$

$$\mathcal{I} \not\models? S''':$$

$$S_r \boxed{\dots D_+ \vee D_- \dots}$$

$$S_x \boxed{\text{дизъ. без } A}$$

Случай 2:  $\mathcal{I} \models S_x, A \in \mathcal{I}$ ; получено:  $\mathcal{I} \not\models D_-, D_- \vee \neg A \in S_-$

Рассмотрим  $\mathcal{H}$ -интерпретацию  $\mathcal{J} = \mathcal{I} \setminus \{A\}$

$\mathcal{I} \models S_x$  и в дизъюнктах из  $S_x$  не содержится  $A \Rightarrow \mathcal{J} \models S_x$

$$\not\models S'' \Rightarrow \mathcal{J} \not\models S''$$

$A \notin \mathcal{J}$  и дизъюнкты из  $S_-$  имеют вид  $D \vee \neg A \Rightarrow \mathcal{J} \models S_-$

$$\mathcal{J} \models S_- \cup S_x \text{ и } \mathcal{J} \not\models S_- \cup S_x \cup S_+ \Rightarrow \mathcal{J} \not\models S_+ \Rightarrow$$

в  $S_+$  содержится дизъюнкт  $D_+ \vee A$ , такой что  $\mathcal{J} \not\models D_+ \vee A \Rightarrow \mathcal{J} \not\models D_+$

$\mathcal{J} \not\models D_+$  и в  $D_+$  не содержится атом  $A \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_+$

$$\mathcal{I} \not\models D_+ \text{ и } \mathcal{I} \not\models D_- \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_+ \vee D_-$$

$$\mathcal{I} \not\models D_+ \vee D_- \text{ и } D_+ \vee D_- \in S_r \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S_r \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S'''$$

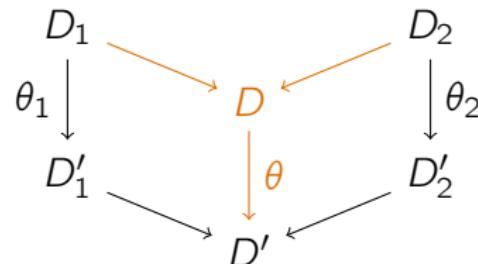
Случай 3:  $\mathcal{I} \models S_x, A \notin \mathcal{I}$  — аналогичен случаю 2 ▼

# Лемма о подъёме для правила резолюции

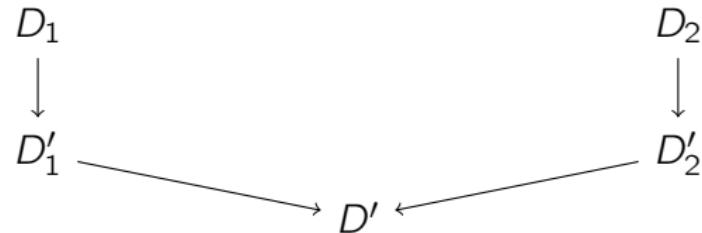
Пусть:

- ▶  $D_1, D_2$  — дизъюнкты, и  $\text{Var}_{D_1} \cap \text{Var}_{D_2} = \emptyset$ ;
- ▶  $D'_1, D'_2$  — основные примеры дизъюнктов  $D_1, D_2$  соответственно;
- ▶  $D'$  — резольвента дизъюнктов  $D'_1, D'_2$ .

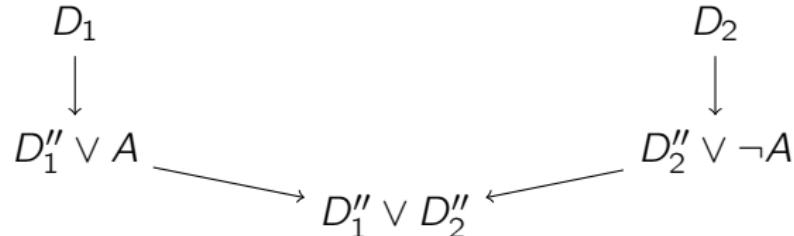
Тогда существует резольвента  $D$  дизъюнктов  $D_1, D_2$ , примером которой является  $D'$ .



## Лемма о подъёме ... (доказательство)

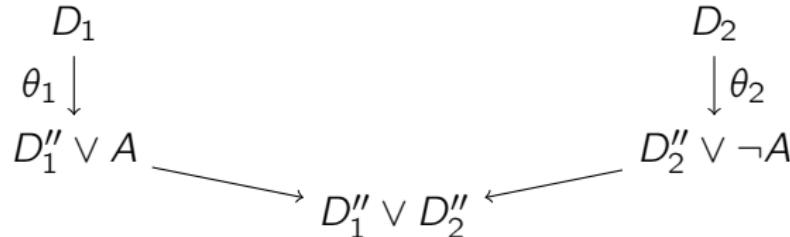


## Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в  $D'_1$ ,  $D'_2$  контрапарную пару  $A, \neg A$  для резольвенты  $D'$

## Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в  $D'_1$ ,  $D'_2$  контрапарную пару  $A, \neg A$  для резольвенты  $D'$

Пусть, для ясности,  $D'_1 = D_1\theta_1$  и  $D'_2 = D_2\theta_2$

## Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{array}{ccc} D_1''' \vee B_1 & & D_2''' \vee \neg B_2 \\ \theta_1 \downarrow & & \downarrow \theta_2 \\ (D_1''' \vee B_1)\theta_1 & \longrightarrow & (D_2''' \vee \neg B_2)\theta_2 \\ & & D_1''' \theta_1 \vee D_2''' \theta_2 \end{array}$$

Выделим в  $D'_1$ ,  $D'_2$  контрапарную пару  $A, \neg A$  для резольвенты  $D'$

Пусть, для ясности,  $D'_1 = D_1\theta_1$  и  $D'_2 = D_2\theta_2$

Выделим в  $D_1$ ,  $D_2$  литеры  $B_1, \neg B_2$ , породившие контрапарную пару

## Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{array}{ccc} D_1''' \vee B_1 & & D_2''' \vee \neg B_2 \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ (D_1''' \vee B_1)\eta & \longrightarrow & (D_2''' \vee \neg B_2)\eta \\ & & \leftarrow (D_1''' \vee D_2''')\eta \end{array}$$

Выделим в  $D'_1$ ,  $D'_2$  контрапарную пару  $A, \neg A$  для резольвенты  $D'$

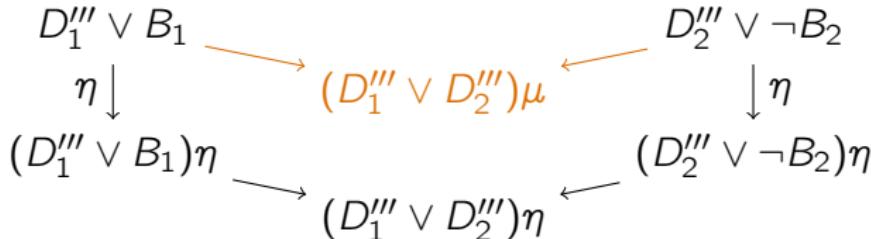
Пусть, для ясности,  $D'_1 = D_1\theta_1$  и  $D'_2 = D_2\theta_2$

Выделим в  $D_1$ ,  $D_2$  литеры  $B_1, \neg B_2$ , породившие контрапарную пару

Без ограничения общности положим, что  $\text{Dom}_{\theta_1} \cap \text{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки  $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$  верно  $D'_1 = D_1\eta$  и  $D'_2 = D_2\eta$

## Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в  $D'_1$ ,  $D'_2$  контрапарную пару  $A, \neg A$  для резольвенты  $D'$

Пусть, для ясности,  $D'_1 = D_1\theta_1$  и  $D'_2 = D_2\theta_2$

Выделим в  $D_1$ ,  $D_2$  литеры  $B_1, \neg B_2$ , породившие контрапарную пару

Без ограничения общности положим, что  $\text{Dom}_{\theta_1} \cap \text{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

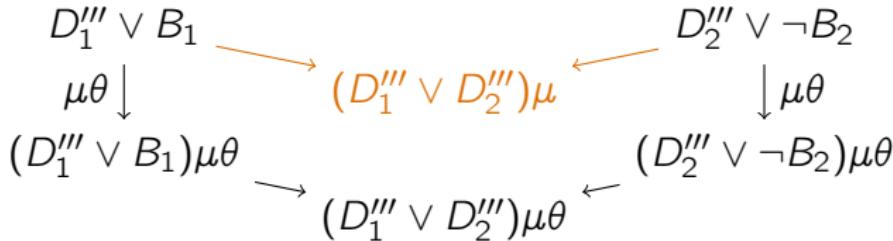
Тогда для подстановки  $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$  верно  $D'_1 = D_1\eta$  и  $D'_2 = D_2\eta$

По теореме об унификации,

существует наиболее общий унификатор  $\mu$  атомов  $B_1, B_2$

Значит,  $(D_1''' \vee D_2''')\mu$  — резольвента дизъюнктов  $D_1, D_2$

## Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в  $D'_1$ ,  $D'_2$  контрапарную пару  $A$ ,  $\neg A$  для резольвенты  $D'$

Пусть, для ясности,  $D'_1 = D_1\theta_1$  и  $D'_2 = D_2\theta_2$

Выделим в  $D_1$ ,  $D_2$  литеры  $B_1$ ,  $\neg B_2$ , породившие контрапарную пару

Без ограничения общности положим, что  $\text{Dom}_{\theta_1} \cap \text{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки  $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$  верно  $D'_1 = D_1\eta$  и  $D'_2 = D_2\eta$

По теореме об унификации,

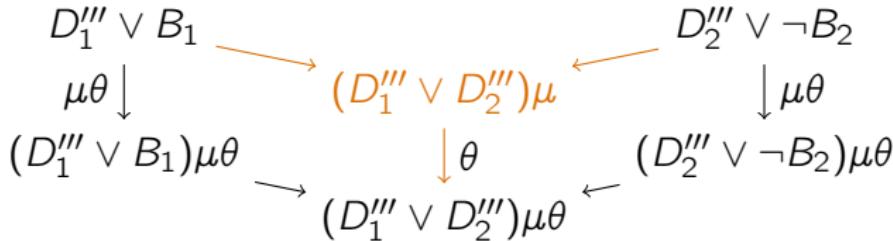
существует наиболее общий унификатор  $\mu$  атомов  $B_1$ ,  $B_2$

Значит,  $(D_1''' \vee D_2''')\mu$  — резольвента дизъюнктов  $D_1$ ,  $D_2$

По определению наиболее общего унификатора,

существует подстановка  $\theta$ , такая что  $\eta = \mu\theta$

## Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в  $D'_1$ ,  $D'_2$  контрапарную пару  $A$ ,  $\neg A$  для резольвенты  $D'$

Пусть, для ясности,  $D'_1 = D_1\theta_1$  и  $D'_2 = D_2\theta_2$

Выделим в  $D_1$ ,  $D_2$  литеры  $B_1$ ,  $\neg B_2$ , породившие контрапарную пару

Без ограничения общности положим, что  $\text{Dom}_{\theta_1} \cap \text{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки  $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$  верно  $D'_1 = D_1\eta$  и  $D'_2 = D_2\eta$

По теореме об унификации,

существует наиболее общий унификатор  $\mu$  атомов  $B_1$ ,  $B_2$

Значит,  $(D_1''' \vee D_2''')\mu$  — резольвента дизъюнктов  $D_1$ ,  $D_2$

По определению наиболее общего унификатора,

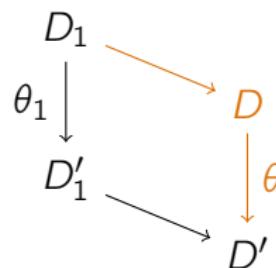
существует подстановка  $\theta$ , такая что  $\eta = \mu\theta$ , и  $D' = D\theta$  ▼

## Лемма о подъёме для правила склейки

Пусть:

- ▶  $D_1, D'_1$  — дизьюнкт и его основной пример;
- ▶  $D'$  — склейка дизьюнкта  $D'_1$ .

Тогда существует склейка  $D$  дизьюнкта  $D_1$ , примером которой является  $D'$ .



Доказательство. Аналогично предыдущей лемме

## Теорема о полноте резолютивного вывода

Из любой невыполнимой системы дизъюнктов  
результативно выводим пустой дизъюнкт

Доказательство.

Рассмотрим произвольную невыполнимую систему дизъюнктов  $S$

По теореме Эрбрана, существует конечное невыполнимое множество  $\mathcal{G}$ ,  
содержащее только основные примеры дизъюнктов из  $S$

По лемме об основных дизъюнктах,  
существует вывод  $D'_1, \dots, D'_n, \square$  из  $\mathcal{G}$

# Теорема о полноте резолютивного вывода

Из любой невыполнимой системы дизъюнктов  
результативно выводим пустой дизъюнкт

Доказательство.  $(D'_1, \dots, D'_n, \square — вывод из \mathcal{G})$

Рассмотрим такую последовательность дизъюнктов

$\mathfrak{S} = (D_1, \dots, D_n, \square)$ :

- ▶ если  $D'_i$  — **пример** дизъюнкта  $D$  из  $S$ , то  $D_i$  — вариант  $D$
- ▶ если  $D'_i$  — **резольвента**  $D'_j$  и  $D'_k$  ( $j < i, k < i$ ),  
то  $D_i$  — резольвента  $D_j$  и  $D_k$ , примером которой является  $D'_j$
- ▶ если  $D'_i$  — **склейка**  $D'_j$  ( $j < i$ ),  
то  $D_i$  — склейка  $D_j$ , примером которой является  $D'_j$
- ▶ подстановки (переименования и унификаторы) выберем так, чтобы  
множества  $\text{Var}_{D_i}$  попарно непересекались

Корректность задания  $\mathfrak{S}$  обеспечивается **леммами о подъёме**

По **определению резолютивного вывода**,  $\mathfrak{S}$  — вывод  $\square$  из  $S$  ▼