Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 12

Логика линейного времени (LTL)

Постановка задачи верификации моделей Крипке относительно LTL

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Напоминание

Для моделей Крипке обсудили «лобовой» теоретико-множественный способ задания спецификаций в виде свойств трасс

Но свойство трасс — это множество, состоящее из бесконечных последовательностей и являющееся в общем случае бесконечным

Для эффективного использования таких свойств необходимо иметь удобный язык их представления

Пара слов о логике высказываний

Самый простой логический язык записи спецификаций,
в сравнении с которым можно объяснять устройство других языков —
это язык логики высказываний (ЛВ)

Иногда для языков предлагаются два варианта синтаксиса:

- Полный с широким спектром синтаксических конструкций
  «на все случаи жизни»
- Краткий с небольшим набором синтаксических конструкций
  и способом выражения остальных через него

Будем придерживаться «ленивого» способа изложения языков:

- Строго вводится краткий синтаксис с семантикой
- Остальные конструкции полного синтаксиса
  вводятся как сокращения
- Смысл всех конструкций содержательно поясняется
- В примерах, иллюстрациях, выкладках и т.п. используется
  полный синтаксис согласно содержательным пояснениям
- В обоснованиях по желанию используется краткий синтаксис

Пара слов о логике высказываний

БНФ, задающая краткий синтаксис формул логики высказываний над множеством атомарных высказываний AP:

$$\varphi \ ::= \ \mathbb{t} \ \mid \ p \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi),$$

где $p \in \mathrm{AP}$ и φ — формула

Операции $\&$ и $\neg$ имеют естественный содержательный смысл: связки «и» и «не» в предложениях

Другие операции полного синтаксиса:

- $\mathbb{f} = \neg\mathbb{t}$
- $\psi_1 \vee \psi_2 = \neg((\neg\psi_1)\,\&\,(\neg\psi_2))$
  - Содержательный смысл: союз «или» в неисключающем смысле
- $\psi_1 \to \psi_2 = (\neg\psi_1) \vee \psi_2$
  - Содержательный смысл: «если-то»

Приоритеты операций по убыванию: $\neg$; $\&$; $\vee$; $\to$

Скобки в формулах нередко опускаются согласно приоритетам и согласно ассоциативности операций $\&$ и $\vee$

Пара слов о логике высказываний

Правила, задающие выполнимость формулы φ
в интерпретации $\mathcal{I} : \mathrm{AP} \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$):

- Соотношение $\mathcal{I} \models \mathbb{t}$ выполняется всегда
- $\mathcal{I} \models p \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(p) = \mathbb{t}$
- $\mathcal{I} \models (\psi_1 \,\&\, \psi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi_1$ и $\mathcal{I} \models \psi_2$
- $\mathcal{I} \models (\neg\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \not\models \varphi$

Например,

для интерпретации $\mathcal{I}$, такой что $\mathcal{I}(\mathrm{x}) = \mathbb{t}$ и $\mathcal{I}(\mathrm{y}) = \mathbb{f}$, верно следующее:

- $\mathcal{I} \models \mathrm{x}$
- $\mathcal{I} \not\models (\neg x)$
- $\mathcal{I} \not\models \mathrm{y}$
- $\mathcal{I} \models (\neg\mathrm{y})$
- $\mathcal{I} \models (\mathrm{x} \,\&\, \neg\mathrm{y})$
- $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{x} \,\&\, \mathrm{y})$

Темпоральные логики

В логике высказываний выполнимость формулы зависит от и определяется для истинностных значений атомарных высказываний

В темпоральных логиках учитывается изменение значений атомарных высказываний с течением **времени**, и выполнимость формулы зависит от выбора рассматриваемого момента времени и от взаимосвязи значений атомарных высказываний в различные моменты времени

Операции темпоральной логики, как правило, делятся на

- операции ЛВ с тем же содержательным смыслом, что и в ЛВ, и
- темпоральные операции, позволяющие рассуждать о взаимосвязи значений высказываний в различные моменты времени

Прежде всего обсудим наиболее известную и популярную логику, предназначенную для записи свойств трасс:
логику линейного времени (LTL)

Логика линейного времени (LTL)

БНФ, задающая краткий синтаксис ltl-формул
над множеством атомарных высказываний AP:

$$\varphi ::= \mathbb{t} \mid p \mid (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid (\mathbf{X}\varphi) \mid (\varphi \mathbf{U} \varphi),$$

где $p \in \mathrm{AP}$ и φ — ltl-формула

Моментами времени дальше будем называть
натуральные чи́сла ($\mathbb{N}$): $1, 2, 3, \ldots$

Понятие выполнимости формул в LTL уточняется так:
формула выполняется или не выполняется (*истинна или ложна*)
не «абсолютно», а в те или иные моменты времени

X и **U** — это темпоральные операции
со следующим содержательным смыслом:

- $\mathbf{X}\varphi$: φ будет выполнено в следующий момент времени
  (*относительно рассматриваемого момента*)
- $\psi_1 \mathbf{U} \psi_2$: в будущем когда-нибудь выполнится ψ_2,
  а до тех пор всегда будет выполняться ψ_1

Логика линейного времени (LTL)

Другие операции полного синтаксиса:

- $\mathbf{F}\varphi = \mathbb{t}\mathbf{U}\varphi$
  - Дословное прочтение: в будущем когда-нибудь выполнится φ, а до тех пор всегда будет выполняться $\mathbb{t}$
  - Иными словами: в будущем когда-нибудь выполнится φ
- $\mathbf{G}\varphi = \neg(\mathbf{F}(\neg\varphi))$
  - Дословное прочтение: неверно то, что когда-нибудь в будущем выполнится формула не-φ
  - Иными словами: в будущем всегда будет выполняться формула φ

Приоритеты операций по убыванию:

$\neg$, **F**, **G** и **X**;

затем **U**;

затем остальные операции с обычными приоритетами

Логика линейного времени (LTL)

Примеры формул,
выражающих требования правильности вычислительных систем:

- Никогда светофоры $\updownarrow$ и $\leftrightarrow$ не будут $\bullet$ одновременно
$$\neg \mathbf{F}(g_{\updownarrow} \,\&\, g_{\leftrightarrow})$$
- Когда-нибудь наступит лето, а до тех пор будет холодно
$$\mathit{cold}\,\mathbf{U}\,\mathit{summer}$$
- Двух подряд плохих дней не бывает:
$$\mathbf{G}(\mathit{bad\_day} \rightarrow \mathbf{X}\neg \mathit{bad\_day})$$
- После $\bullet$ светофор $\updownarrow$ рано или поздно станет $\bullet$
$$\mathbf{G}(r_{\updownarrow} \rightarrow \mathbf{F}\, g_{\updownarrow})$$
- Светофор $\updownarrow$ бесконечно часто бывает $\bullet$
$$\mathbf{GF}\, g_{\updownarrow}$$
- Мне уготована вечность в раю или в аду
$$\mathbf{F}(\mathbf{G}\mathit{heaven} \vee \mathbf{G}\mathit{hell})$$

Логика линейного времени (LTL)

Роль интерпретаций для ltl-формул играют трассы:
событием $\tau[i]$ трассы τ задаются истинностные значения всех атомарных высказываний в момент времени i

Семантика ltl-формул задаётся отношением выполнимости ltl-формулы φ на трассе τ ($\tau \models \varphi$):

- Соотношение $\tau \models \mathbb{t}$ верно всегда
- $\tau \models p$, где $p \in \mathrm{AP} \quad \Leftrightarrow \quad p \in \tau[1]$
- $\tau \models (\psi_1 \,\&\, \psi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \tau \models \psi_1$ и $\tau \models \psi_2$
- $\tau \models (\neg\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \tau \not\models \varphi$
- $\tau \models (\mathbf{X}\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \tau^{\geq 2} \models \varphi$
- $\tau \models (\psi_1 \mathbf{U} \psi_2) \quad \Leftrightarrow$ существует момент времени i, такой что
  - $\tau^{\geq i} \models \psi_2$ и
  - для любого момента времени j, такого что $j < i$, верно $\tau^{\geq j} \models \psi_1$

Запись $\tau^{\geq m} \models \varphi$ можно содержательно трактовать как выполнимость формулы φ на трассе τ в момент времени m

Логика линейного времени (LTL)

Утверждение (семантика F)

Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:

$\tau \models \mathbf{F}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **существует момент времени i, такой что** $\tau^{\geq i} \models \varphi$

Утверждение (семантика G)

Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:

$\tau \models \mathbf{G}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **для любого момента времени i верно** $\tau^{\geq i} \models \varphi$

Доказательство. Очевидным образом следует из определений **F** и **G** и семантики ltl-формул

Логика линейного времени (LTL)

Утверждение. **Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:**

$\tau \models \mathbf{GF}\varphi \quad \Leftrightarrow$ **для бесконечного числа попарно различных моментов времени i верно $\tau^{\geq i} \models \varphi$**

Доказательство. Перепишем это утверждение «негативно»:

$\tau \not\models \mathbf{GF}\varphi \quad \Leftrightarrow$ для не более чем конечного числа моментов времени i верно $\tau^{\geq i} \models \varphi$

($\Rightarrow$) Пусть $\tau \not\models \mathbf{GF}\varphi$

По семантике **F** и **G**, верно следующее: существует момент времени k, такой что для любого момента k', такого что $k' \geq k$, верно $\tau^{\geq k'} \not\models \varphi$

Значит, соотношение $\tau^{\geq i} \models \varphi$ выполняется только для $i < k$,
то есть для не более чем k моментов времени

($\Leftarrow$) Пусть соотношение $\tau^{\geq i} \models \varphi$ выполняется для
не более чем конечного числа моментов времени i

Рассмотрим наибольший момент времени k, такой что $\tau^{\geq k} \models \varphi$

Тогда для любого момента k', такого что $k' \geq k + 1$, верно $\tau^{\geq k'} \not\models \varphi$

По семантике **F** и **G**, это означает, что $\tau \not\models \mathbf{GF}\varphi$ ▼

Логика линейного времени (LTL)

Будем говорить, что формула выполняется почти всегда
(*более широко — нечто справедливо почти всегда*),
если она выполняется во все моменты времени,
кроме, быть может, некоторого конечного числа моментов

Утверждение. **Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:**
формула φ почти всегда выполняется на τ $\Leftrightarrow$
существует момент времени k, такой что
φ выполняется на τ во все моменты, не меньшие k

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть φ почти всегда выполняется на τ
Тогда множество $X = \{i \mid i \in \mathbb{N}, \tau^{\geq i} \not\models \varphi\}$ конечно
Пусть k — наибольший момент из X
Тогда φ выполняется на τ во все моменты, не меньшие $k+1$

($\Leftarrow$) Пусть существует момент k, такой что
для всех моментов k', не меньших k, верно $\tau^{\geq k'} \models \varphi$
Тогда множество $X = \{i \mid i \in \mathbb{N}, \tau^{\geq i} \not\models \varphi\}$ включено в $\{1, 2, \ldots, k-1\}$
Следовательно, множество X конечно ▼

Логика линейного времени (LTL)

Утверждение. **Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:**
$\tau \models \mathbf{FG}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **формула φ выполняется на τ почти всегда**

Доказательство.

По предыдущему утверждению,
φ выполняется на τ почти всегда $\Leftrightarrow$
существует момент k, такой что
для любого момента k', не меньшего k, верно $\tau^{\geq k} \models \varphi$

По семантике **F** и **G**, последнее соотношение равносильно $\tau \models \mathbf{FG}\varphi$ ▼

Задача проверки моделей относительно LTL

В блоке 11 для модели Крипке M и свойства трасс P было введено обозначение $M \models P$ того, что модель M удовлетворяет свойству P

Ltl-формула φ может восприниматься как
способ представления свойства трасс $\mathrm{Tr}(\varphi) = \{\tau \mid \tau \in \mathrm{Tr}, \tau \models \varphi\}$

Ltl-формула φ выполняется на модели M ($M \models \varphi$), если
справедливо включение $\mathrm{Tr}(M) \subseteq \mathrm{Tr}(\varphi)$

Небольшое пояснение:

- Ltl-формула делит все трассы на хорошие (на которых формула выполняется) и плохие (на которых формула не выполняется)
- Соотношение $M \models \varphi$ означает, что все трассы модели M хорошие (т.е. что в модели M нет ни одной плохой трассы)

Задача проверки моделей для LTL (MC-LTL) формулируется так:

Для заданной модели Крипке M и заданной ltl-формулы φ проверить справедливость соотношения

$$M \models \varphi$$