Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 12

Автоматы Бюхи
Обобщённые автомты Бюхи

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Слова и языки

Алфавит — это конечное непустое множество, элементы которого называются буквами, или символами

Слово над алфавитом Σ — это конечная последовательность букв из Σ

ω-слово над алфавитом Σ — это бесконечная последовательность букв из Σ

Например, если множество атомарных высказываний конечно, то трасса — это ω-слово над алфавитом событий

Σ^* и Σ^ω — соответственно множество всех слов и всех ω-слов над алфавитом Σ

В записи слов и ω-слов будем опускать разделители:

$$\text{«}x_0, x_1, x_2, \ldots\text{»} \ = \ \text{«}x_0 x_1 x_2 \ldots\text{»}$$

Языком и ω-языком над заданным алфавитом будем называть соответственно множество слов и множество ω-слов

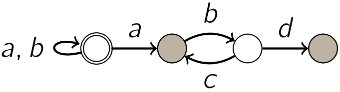
Автоматы Бюхи

Автомат Бю́хи над алфавитом Σ — это система $A = (S, S_0, \to, F)$, где:

- S — конечное множество состояний
- S_0 — множество начальных состояний
- $\to \subseteq S \times \Sigma \times S$ — отношение переходов
  - Изображение семейства переходов $(s, x, s'), (s, y, s'), \ldots$: $s \xrightarrow{x, y, \ldots} s'$
- $F \subseteq S$ — множество допускающих состояний

Как и для моделей Крипке, для автоматов будут применяться графовые терминология и обозначения

Пример:



 — состояние

 — начальное состояние

 — допускающее состояние

Автоматы Бюхи

Будем говорить, что бесконечный путь

$$s_0 \xrightarrow{x_0} s_1 \xrightarrow{x_1} s_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

в автомате Бюхи порождается ω-словом $x_0x_1x_2\dots$

Вычисление автомата Бюхи — это бесконечный путь, начинающийся в начальном состоянии

$\mathrm{Tr}(A, w)$ — множество всех вычислений A, порождающихся ω-словом w

$\mathit{inf}(\rho)$ — множество состояний, встречающихся бесконечно часто в бесконечном пути ρ

Вычисление ρ автомата Бюхи $A = (S, S_0, \to, F)$ успешно (является принимающим), если хотя бы одно заключительное состояние повторяется в нём бесконечно часто

$$(\mathit{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

ω-слово w принимается автоматом Бюхи A, если A содержит хотя бы одно успешное вычисление, порождаемое этим словом

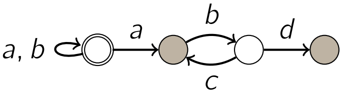
$$(\exists \rho \in \mathrm{Tr}(A, w) : \mathit{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

Автоматы Бюхи

$L(A)$ — так будет обозначаться ω-язык, распознающийся автоматом A (или, более коротко, — ω-язык автомата A): множество всех ω-слов, принимаемых автоматом A

Пример

Автоматом Бюхи A



распознаётся ω-язык

$$L(A) = \{Wabcbcbc\dots bc\cdots \mid W \in \{a, b\}^*\}$$

На некоторых этапах автоматного алгоритма *удобно* будет строить автоматы в *более общей* постановке, в которой автомат может содержать и более одного допускающего множества

Обобщённый автомат Бюхи

Обобщённый автомат Бюхи над алфавитом Σ — это система $GA = (S, S_0, \to, \mathcal{F})$, где:

- S, S_0 и $\to$ — такие же множества состояний, начальных состояний и переходов, что и в автомате Бюхи
- $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ — семейство допускающих множеств состояний

Все понятия, введённые для автоматов Бюхи, кроме успешного вычисления, дословно переносятся на обобщённые автоматы Бюхи

Вычисление ρ обобщённого автомата Бюхи GA успешно, если в **каждом** допускающем множестве есть хотя бы одно состояние, повторяющееся в ρ бесконечно часто

$$(\forall F \in \mathcal{F} : inf(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

Формульная запись того, что слово w принимается автоматом $A = (S, S_0, \to, \mathcal{F})$, выглядит так:

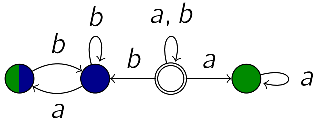
$$\exists \rho \in \mathrm{Tr}(A, w) : \forall F \in \mathcal{F} : inf(\rho) \cap F \neq \emptyset$$

Обобщённый автомат Бюхи

Далее состояния, принадлежащие одному допускающему множеству, изображаются как окрашенные в один (не белый) цвет

Если вершина принадлежит нескольким принимающим множествам, то она окрашивается во все соответствующие цвета

Пример



Успешное вычисление этого автомата — это вычисление, в котором бесконечно часто повторяются хотя бы одна синяя вершина и хотя бы одна зелёная вершина

Этим автоматом распознаётся множество всех ω-слов вида WbU, где

- $W \in \{a, b\}^*$ и
- U — любое ω-слово над $\{a, b\}$, содержащее бесконечно много «a», но ни одного «aa»

Обобщённый автомат Бюхи

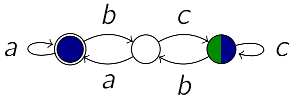
Автомат Бюхи $A = (S', S'_0, \mapsto, F)$ назовём разобобщением обобщённого автомата Бюхи $GA = (S, S_0, \to, \mathcal{F})$, если он устроен так:

- Произвольно упорядочим допускающие множества GA:
$$\mathcal{F} = \{F_0, \ldots, F_{k-1}\}$$
- $S' = S \times \{0, 1, \ldots, k-1\}$
- $S'_0 = S_0 \times \{0\}$
- $F = \{(s, i) \mid s \in F_i,\ i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\}$
- Для каждого перехода $s \xrightarrow{x} s'$ автомата GA и каждого $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ в A включаются следующие переходы (и только такие переходы):
  - если $(s, i) \notin F$, то $(s, i) \overset{x}{\mapsto} (s', i)$
  - иначе $(s, i) \overset{x}{\mapsto} (s', (i+1) \mod k)$

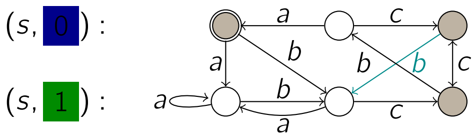
Обобщённый автомат Бюхи

Пример

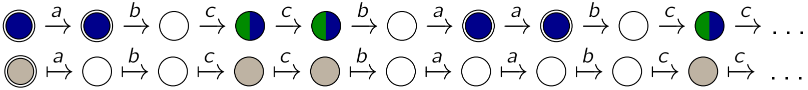
Для обобщённого автомата Бюхи GA



с порядком допускающих множеств (синее, зелёное) соответствует такое разобобщение A:



Пример взаимно соответствующих вычислений этих автоматов:



Теорема о разобобщении автомата Бюхи

Для любого обобщённого автомата Бюхи GA **и любого его разобобщения** A **верно** $L(A) = L(GA)$

Доказательство $(L(A) \subseteq L(GA))$

Для определённости положим, что $GA = (S, S_0, \to, \{F_0, \dots, F_{k-1}\})$ и $A = (S', S'_0, \mapsto, F)$

Рассмотрим произвольное ω-слово $w \in L(A)$

В A существует успешное вычисление ρ вида $(s_0, i_0) \xmapsto{w[0]} (s_1, i_1) \xmapsto{w[1]} \dots$

По устройству A и успешности ρ, в ρ содержится бесконечная подпоследовательность $(q_0, 0), (q_1, 1), \dots, (q_n, n \mod k), \dots,$ содержащая только элементы F

По построению A:

- $\rho_g = (s_0 \xrightarrow{w[0]} s_1 \xrightarrow{w[1]} \dots)$ — вычисление GA
- Для всех $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ верно $q_i \in F_{i \mod k}$

Значит, для каждого $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, верно $inf(\rho_g) \cap F_i \neq \emptyset$: этому пересечению принадлежат, например, состояния $q_i, q_{i+k}, q_{i+2k}, q_{i+3k}, \dots$

Следовательно, ρ_g — успешное вычисление GA, а значит, $w \in L(GA)$

Теорема о разобобщении автомата Бюхи

Для любого обобщённого автомата Бюхи GA **и любого его разобобщения** A **верно** $L(A) = L(GA)$

Доказательство ($L(A) \supseteq L(GA)$)

$$(GA = (S, S_0, \to, \{F_0, \dots, F_{k-1}\}),\ A = (S', S'_0, \mapsto, F))$$

Рассмотрим произвольное ω-слово $w \in L(GA)$

В GA существует успешное вычисление ρ_g вида $s_0 \xrightarrow{w[0]} s_1 \xrightarrow{w[1]} \dots$

По успешности ρ_g, для этого вычисления существуют следующие индексы $i_0, i_1, i_2, \dots$:

- i_0 — наименьший, для которого $s_{i_0} \in F_0$
- i_m, $m \geq 1$, — наименьший, для которого $i_m > i_{m-1}$ и $s_{i_m} \in F_{m \bmod k}$

Тогда, по построению, в A содержится успешное вычисление, принимающее w:

$$(s_0, 0) \mapsto \dots \mapsto (s_{i_0}, 0) \mapsto (s_{i_0+1}, 1) \mapsto \dots \mapsto (s_{i_1}, 1)$$
$$\mapsto (s_{i_1+1}, 1) \mapsto \dots \mapsto \dots \mapsto (s_{i_{k-1}}, k-1) \mapsto (s_{i_{k-1}+1}, 0) \mapsto \dots$$

Значит, $w \in L(A)$ ▼