

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 42

Теорема Чёрча

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

От МТ к ХЛП

Проблема останова МТ Halt — это следующая проблема распознавания:

- ▶ Входы: МТ M , ленточное слово w
- ▶ $\text{Halt}(M, w) = \mathfrak{t} \Leftrightarrow$ вычисление M на w конечно

Известно, что эта проблема алгоритмически неразрешима

Используя этот факт, покажем неразрешимость проблемы распознавания LogProg , устроенной так:

- ▶ Входы: конечная сигнатура σ логики предикатов, ХЛП $\mathcal{P}$ и основной запрос Q этой сигнатуры
- ▶ $\text{LogProg}(\sigma, \mathcal{P}, Q) = \mathfrak{t} \Leftrightarrow Q \rightarrow_{\mathcal{P}}^* \square$

От МТ к ХЛП

Утверждение. Проблема Halt m -сводима к проблеме LogProg

Доказательство.

В блоке 40 предложен алгоритм $\mathfrak{A}$, для произвольных МТ $M = (\mathcal{A}, \mathbf{\Lambda}, \mathcal{Q}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$ и ленточного слова w преобразующий пару (M, w) в конечную сигнатуру, ХЛП и основной запрос $\overline{\mathfrak{A}}(M, w) = (\sigma, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$:

- ▶ $\sigma = \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{Q} \cup \{\mathbf{nil}\}, \{.\}^{(2)}, \{p\}^{(1)} \rangle$,
- ▶ $\mathcal{P} = \mathcal{P}_M^1$,
- ▶ $\mathcal{Q} = ?p(\tau_{(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{q}_0, w\mathbf{\Lambda})})$ —

такие что вычисление M на w конечно $\Leftrightarrow \mathcal{Q} \rightarrow_{\mathcal{P}}^* \square$

Значит, $\text{Halt}(M, w) = \text{LogProg}(\overline{\mathfrak{A}}(M, w))$, что и означает m -сводимость Halt к LogProg ▼

Следствие. Проблема LogProg алгоритмически неразрешима

Доказательство. Достаточно совместить последнее утверждение с известной неразрешимостью проблемы останова МТ и следствием из теоремы об m -сводимости ▼

От ХЛП к логике предикатов (ЛП)

Проблема общезначимости формул ЛП Valid — это проблема распознавания, устроенная так:

- ▶ Вход: конечная¹ сигнатура σ и формула ЛП φ этой сигнатуры
- ▶ $\text{Valid}(\sigma, \varphi) = \mathbb{t} \Leftrightarrow \models \varphi$

Утверждение. Проблема LogProg m -сводима к проблеме Valid

Доказательство.

Достаточно показать, как по ХЛП $\mathcal{P} = \{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k\}$ и основному запросу $\mathcal{Q}$ этой сигнатуры построить формулу φ (той же конечной сигнатуры, что и программа с запросом), такую что

$$\mathcal{Q} \rightarrow_{\mathcal{P}}^* \square \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi$$

¹ Приложив некоторые усилия, можно изложить всё и для сигнатур с бесконечным множеством символов, но для экономии времени не будем этого делать

Утверждение: $\text{LogProg} \xrightarrow{m} \text{Valid}$ (доказательство)

$\mathcal{P} = \{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k\}$ — ХЛП + $\mathcal{Q}$ — основной запрос $\rightarrow?$ φ

$$\mathcal{Q} \rightarrow_{\mathcal{P}}^* \square$$

$\Leftrightarrow$ (по корректности операционной семантики ХЛП)

существует правильный ответ θ на запрос $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$

$\Leftrightarrow$ (т.к. $\mathcal{Q}$ — основной запрос)

ε — правильный ответ на запрос $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$

$\Leftrightarrow$ (по определению правильного ответа на запрос к ХЛП)

$$\{\Phi_{\mathcal{R}_1}, \dots, \Phi_{\mathcal{R}_k}\} \models \Phi_{\mathcal{Q}}$$

$\Leftrightarrow$ (по теореме о логическом следствии)

$$\models \Phi_{\mathcal{R}_1} \& \dots \& \Phi_{\mathcal{R}_k} \rightarrow \Phi_{\mathcal{Q}}$$

Значит, подходящей будет формула $\varphi = \Phi_{\mathcal{R}_1} \& \dots \& \Phi_{\mathcal{R}_k} \rightarrow \Phi_{\mathcal{Q}}$ ▼

Теорема Чёрча

Проблема общезначимости формул логики предикатов (Valid) алгоритмически неразрешима

Доказательство. Достаточно совместить последнее утверждение, полученную ранее **неразрешимость проблемы LogProg** и следствие из теоремы об **m-сводимости** ▼

Следствие. Проблема общезначимости формул логики предикатов сигнатуры $\langle \emptyset, \{f^{(2)}\}, \{P^{(1)}\} \rangle$ алгоритмически неразрешима

Доказательство. Достаточно заметить, что

- ▶ Для сведения Halt к LogProg и затем к Valid потребовалась сигнатура с конечным множеством констант $\mathcal{A} \cup \mathcal{Q} \cup \{\mathbf{nil}\}$, одним функциональным символом $\cdot^{(2)}$ и одним предикатным символом $p^{(1)}$
- ▶ Если в (не)общезначимой формуле заменить константу на переменную, не встречающуюся в формуле, то формула останется (не)общезначимой ▼