

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 42

Теорема Чёрча

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

## От МТ к ХЛП

Проблема останова МТ Halt — это следующая проблема распознавания:

- ▶ Входы: МТ  $M$ , ленточное слово  $w$
- ▶  $\text{Halt}(M, w) = \text{т} \Leftrightarrow$  вычисление  $M$  на  $w$  конечно

*Известно, что эта проблема алгоритмически неразрешима*

Используя этот факт, покажем неразрешимость проблемы распознавания LogProg, устроенной так:

- ▶ Входы: конечная сигнатура  $\sigma$  логики предикатов, ХЛП  $\mathcal{P}$  и основной запрос  $Q$  этой сигнатуры
- ▶  $\text{LogProg}(\sigma, \mathcal{P}, Q) = \text{т} \Leftrightarrow Q \rightarrow_{\mathcal{P}}^* \square$

# От МТ к ХЛП

**Утверждение.** Проблема Halt  $m$ -сводима к проблеме LogProg

**Доказательство.**

В блоке 40 предложен алгоритм  $\mathfrak{A}$ , для произвольных МТ  $M = (\mathcal{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$  и ленточного слова  $w$  преобразующий пару  $(M, w)$  в конечную сигнатуру, ХЛП и основной запрос

$\overline{\mathfrak{A}}(M, w) = (\sigma, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ :

- ▶  $\sigma = \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{Q} \cup \{\mathbf{nil}\}, \{.\}^{(2)}, \{p\}^{(1)} \rangle$ ,
- ▶  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_M^1$ ,
- ▶  $\mathcal{Q} = ?p(\tau_{(\Lambda, \mathbf{q}_0, w\Lambda)})$  —

такие что вычисление  $M$  на  $w$  конечно  $\Leftrightarrow \mathcal{Q} \rightarrow_{\mathcal{P}}^* \square$

Значит,  $\text{Halt}(M, w) = \text{LogProg}(\overline{\mathfrak{A}}(M, w))$ , что и означает  $m$ -сводимость Halt к LogProg ▼

**Следствие.** Проблема LogProg алгоритмически неразрешима

**Доказательство.** Достаточно совместить последнее утверждение с известной неразрешимостью проблемы останова МТ и следствием из теоремы об  $m$ -сводимости ▼

# От ХЛП к логике предикатов (ЛП)

Проблема общезначимости формул ЛП Valid — это проблема распознавания, устроенная так:

- ▶ Вход: конечная<sup>1</sup> сигнатура  $\sigma$  и формула ЛП  $\varphi$  этой сигнатуры
- ▶  $\text{Valid}(\sigma, \varphi) = \text{т} \Leftrightarrow \models \varphi$

**Утверждение.** Проблема LogProg  $m$ -сводима к проблеме Valid

Доказательство.

Достаточно показать, как по ХЛП  $\mathcal{P} = \{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k\}$  и основному запросу  $\mathcal{Q}$  этой сигнатуры построить формулу  $\varphi$  (той же конечной сигнатуры, что и программа с запросом), такую что

$$\mathcal{Q} \rightarrow_{\mathcal{P}}^* \square \Leftrightarrow \models \varphi$$

---

<sup>1</sup> Приложив некоторые усилия, можно изложить всё и для сигнатур с бесконечным множеством символов, но для экономии времени не будем этого делать

## Утверждение: $\text{LogProg} \stackrel{m}{\mapsto} \text{Valid}$ (доказательство)

$\mathcal{P} = \{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k\}$  — ХЛП +  $\mathcal{Q}$  — основной запрос  $\rightarrow?$   $\varphi$

$\mathcal{Q} \rightarrow_{\mathcal{P}}^* \square$

$\Leftrightarrow$  (по корректности операционной семантики ХЛП)

существует правильный ответ  $\theta$  на запрос  $\mathcal{Q}$  к  $\mathcal{P}$

$\Leftrightarrow$  (т.к.  $\mathcal{Q}$  — основной запрос)

$\varepsilon$  — правильный ответ на запрос  $\mathcal{Q}$  к  $\mathcal{P}$

$\Leftrightarrow$  (по определению правильного ответа на запрос к ХЛП)

$\{\Phi_{\mathcal{R}_1}, \dots, \Phi_{\mathcal{R}_k}\} \models \Phi_{\mathcal{Q}}$

$\Leftrightarrow$  (по теореме о логическом следствии)

$\models \Phi_{\mathcal{R}_1} \& \dots \& \Phi_{\mathcal{R}_k} \rightarrow \Phi_{\mathcal{Q}}$

Значит, подходящей будет формула  $\varphi = \Phi_{\mathcal{R}_1} \& \dots \& \Phi_{\mathcal{R}_k} \rightarrow \Phi_{\mathcal{Q}}$  ▼

# Теорема Чёрча

**Проблема общезначимости формул логики предикатов (Valid) алгоритмически неразрешима**

**Доказательство.** Достаточно совместить последнее утверждение, полученную ранее **неразрешимость проблемы LogProg** и следствие из теоремы об **m-сводимости** ▼

**Следствие.** Проблема общезначимости формул логики предикатов сигнатуры  $\langle \emptyset, \{f^{(2)}\}, \{P^{(1)}\} \rangle$  алгоритмически неразрешима

**Доказательство.** Достаточно заметить, что

- ▶ Для сведения Halt к LogProg и затем к Valid потребовалась сигнатура с конечным множеством констант  $\mathcal{A} \cup \mathcal{Q} \cup \{\text{nil}\}$ , одним функциональным символом  $\cdot^{(2)}$  и одним предикатным символом  $p^{(1)}$
- ▶ Если в (не)общезначимой формуле заменить константу на переменную, не встречающуюся в формуле, то формула останется (не)общезначимой ▼