

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 43

Модальные логики

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима **всегда** близко

3: Зима **бывает** близко

Если отбросить всё лишнее, то

для высказывания 1 справедлива одна из двух оценок:

правда, если зима действительно близко, и

неправда, если это не так

Смысл высказываний 2 и 3 *тесно связан* со смыслом 1:

если $x =$ «зима близко», то

1: x

2: **всегда** x

3: **иногда бывает** x

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

- 1: Зима близко
- 2: Зима **всегда** близко
- 3: Зима **бывает** близко

Слова, используемые как уточнение истинностной оценки высказывания, называются **модальностями** (лат. *modus* — мера)

«**Всегда**» и «**иногда**» — это **темпоральные модальности** (модальности времени) (лат. *tempus* — время)

Можно сказать, что «**всегда**» и «**иногда**» — это \forall и \exists , но тогда:

- ▶ Какими предметами задаётся время, и каковы свойства этих предметов?
- ▶ Как устроить анализ смысла высказываний в интерпретациях с такими предметами?

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Я знаю, что зима близко

3: Я допускаю возможность того, что зима близко

Смысл высказываний 2 и 3 тесно связан со смыслом 1:

если $x =$ «зима близко», то

1: x

2: известно, что x

3: допустимо x

«Известно» и «допустимо» — это эпистемические модальности

(модальности знания)

(др.-греч. ἐπιστήμη — знание)

Если «известно» (всеобщее знание)

и «допустимо» (частное, некоторое знание) трактовать как \forall и \exists ,

то на какие «предметы знаний» указывают эти кванторы?

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима **должна быть** близко

3: Зима **имеет право быть** близко

Смысл высказываний 2 и 3 *тесно связан* со смыслом 1:

если $x =$ «зима близко», то

1: x

2: **должно быть** x

3: **имеет право быть** x

«**Должен**» и «**имеет право**» — это **деонтические модальности**
(**модальности долга**) (др.-греч. $\delta\acute{\epsilon}\sigma\nu$ — *должное*)

Как связан смысл фраз «это так» и «это должно быть так»?

В *рациональных* высказываниях используется великое множество разных модальностей, и точно описать их смысл в рамках классической логики — очень непростая задача

Модальности

Часто (*хотя и не всегда*) в высказываниях используются модальности двух двойственных видов:

Модальность необходимого

необходимо
обязательно
всегда
должен
знает
доказуемо
□

Модальность возможного

возможно
не исключено
иногда
имеет право
предполагает
непротиворечиво
◇

Хотелось бы иметь единообразный способ определения смысла модальностей □ и ◇ — и такой способ используется в

модальных логиках

Модальные логики: синтаксис

Синтаксис **формул** пропозициональных модальных логик над множеством пропозициональных переменных Var :

$\varphi ::= x \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\Box\varphi) \mid (\Diamond\varphi)$,
где φ — формула и $x \in \text{Var}$

Это **синтаксис формул логики высказываний**, расширенный возможностью **расстановки модальностей необходимого и возможного над любыми (под)формулами**

Приоритет операций: \neg , \Box и \Diamond ; затем $\&$; затем \vee ; затем \rightarrow

Пример формулы: $\Diamond x \& \Box \neg \Diamond (x \vee y)$

«возможно x, и при этом необходимо невозможно, что x или y»

В этой формуле пока не говорится, что означают «необходимость» и «возможность»:
определение этих понятий — часть **семантики** формулы

Модальные логики: семантика Крипке

Описание семантики начнём с примера: **Зима всегда близко**

Представим себе любое строгое определение зимы и того, в каких случаях зима считается близкой

Если остановить время и задаться вопросом, близко зима или нет, то ответ на этот вопрос (**да** или **нет**) можно представить как значение пропозициональной переменной x

Время течёт, и мир меняется, как и значение x :

сейчас \longrightarrow через минуту \longrightarrow через месяц \longrightarrow через полгода
 $\neg x$ $\neg x$ $\neg x$ x

Ответ на вопрос « $\Box x$?» в так меняющемся мире — **нет**, не всегда x

Изменение мира можно представить себе и по-другому:

существует много взаимосвязанных миров с разными значениями x , и в семантике \Box комбинируются значения x многих миров

Модальные логики: семантика Крипке

Модель Крипке (над переменными Var) — это система (W, \mapsto, L) , где

- ▶ W — непустое множество **состояний** (или, по-другому, — **миров**)
- ▶ $\mapsto \subseteq W \times W$ — отношение **переходов** между мирами
 - ▶ Если $w \mapsto w'$, то w' — мир, **альтернативный** для w (**w -альтернатива**)
- ▶ $L : W \rightarrow 2^{\text{Var}}$ — оценка переменных для каждого мира
 - ▶ « $x \in L(w)$ » = «переменная x истинна в мире w »

Шкала Крипке (*Kripke frame*),

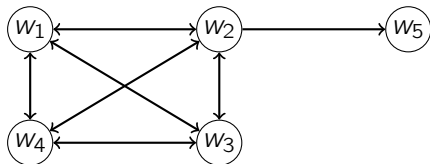
на которой **основывается** модель (W, \mapsto, L) , — это пара (W, \mapsto)

Модель Крипке — это **интерпретация** для формул модальной логики

Модальные логики: семантика Крипке

Например,

$(\text{Var} = \{a\})$



— это шкала Крипке

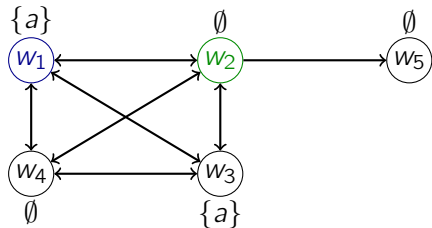
Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, w \models x \Leftrightarrow x \in L(w)$ ($x \in \text{Var}$)
- ▶ $\mathcal{I}, w \models \varphi \ \& \ \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \models \varphi$ и $\mathcal{I}, w \models \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \models \varphi \ \vee \ \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$

Например,

($\text{Var} = \{a\}$)



— это модель Крипке (\mathcal{I})

$\mathcal{I}, w_1 \models a$, $\mathcal{I}, w_2 \not\models a$

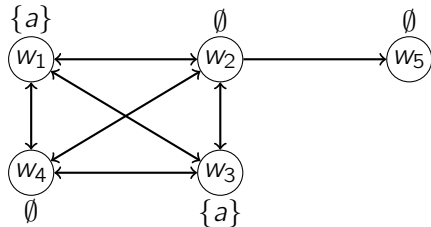
Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, w \models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \not\models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \not\models \varphi$

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке (\mathcal{I})

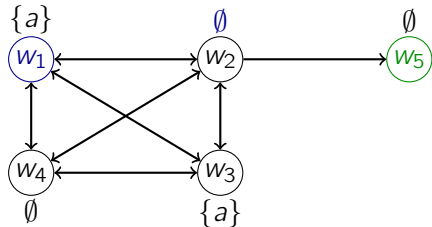
Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi \Leftrightarrow$
для любой w -альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке (\mathcal{I})

$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a,$ $\mathcal{I}, w_5 \models \Box a$

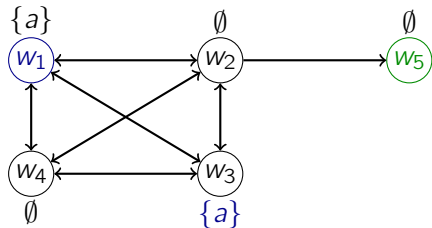
Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, w \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow$
существует w -альтернатива w' ,
такая что верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например,

(Var = {a})



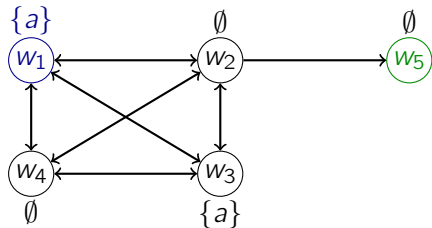
— это модель Крипке (\mathcal{I})

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a, \quad \mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond a$$

Модальные логики: семантика Крипке

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке (\mathcal{I})

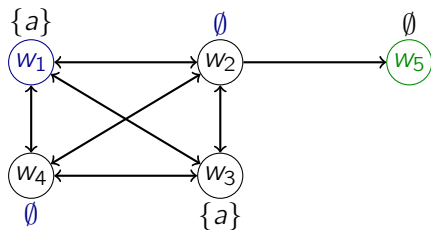
$\mathcal{I}, w_1 \models \Box \Diamond a$,

$\mathcal{I}, w_5 \models \Box \Diamond a$

Модальные логики: семантика Крипке

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке (\mathcal{I})

$\mathcal{I}, w_1 \not\models \diamond \Box a$,

$\mathcal{I}, w_2 \models \diamond \Box a$

, $\mathcal{I}, w_5 \not\models \diamond \Box a$

Модальные логики: семантика Крипке

Пусть \mathcal{F} — шкала Крипке, \mathcal{I} — модель Крипке, и φ, ψ — формулы модальной логики

Тогда

- ▶ формула φ **истинна в модели** \mathcal{I} ($\mathcal{I} \models \varphi$), если для любого мира w модели \mathcal{I} верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- ▶ формула φ **истинна на шкале** \mathcal{F} ($\mathcal{F} \models \varphi$), если для любой модели Крипке \mathcal{J} , основанной на \mathcal{F} , верно $\mathcal{J} \models \varphi$
- ▶ формула φ **общезначима** ($\models \varphi$), если для любой шкалы \mathcal{F} верно $\mathcal{F} \models \varphi$
- ▶ формулы φ и ψ **равносильны** ($\varphi \sim \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение. Для любой формулы φ верно: $\Box\varphi \sim \neg\Diamond\neg\varphi$

Доказательство. «Для любой альтернативы верно φ » = «Не существует альтернативы, такой что не- φ » ▼

Утверждение. Для любой формулы φ верно: если $\models \varphi$, то $\models \Box\varphi$

Доказательство. Если φ выполняется в любом мире любой модели, то φ выполняется и в любой альтернативе любого мира любой модели ▼

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение. Для любых формул φ , ψ верно:

$$\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$$

Доказательство.

Предположим от противного, что $\not\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

Тогда существуют модель $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и мир w , такие что $\mathcal{I}, w \not\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

Тогда по семантике \rightarrow :

- ▶ $\mathcal{I}, w \models \Box(\varphi \rightarrow \psi)$, а значит, для каждой w -альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi \rightarrow \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi$, а значит, для каждой w -альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$ — и, по семантике \rightarrow , $\mathcal{I}, w' \models \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \not\models \Box\psi$, а значит, существует w -альтернатива w' , такая что $\mathcal{I}, w' \not\models \psi$, что *противоречит* предыдущему пункту ▼