

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 43

Модальные логики

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

- 1: Зима близко
- 2: Зима всегда близко
- 3: Зима бывает близко

Если отбросить всё лишнее, то для высказывания 1 справедлива одна из двух оценок: правда, если зима действительно близко, и неправда, если это не так

Смысл высказываний 2 и 3 тесно связан со смыслом 1:
если x = «зима близко», то

- 1: x 2: всегда x 3: иногда бывает x

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

- 1: Зима близко
- 2: Зима всегда близко
- 3: Зима бывает близко

Слова, используемые как уточнение истинностной оценки высказывания, называются **модальностями** (лат. *modus* — мера)

«Всегда» и «иногда» — это **темперальные модальности** (модальности времени) (лат. *tempus* — время)

Можно сказать, что «всегда» и «иногда» — это \forall и \exists , но тогда:

- ▶ Какими предметами задаётся время, и каковы свойства этих предметов?
- ▶ Как устроить анализ смысла высказываний в интерпретациях с такими предметами?

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Я знаю, что зима близко

3: Я допускаю возможность того, что зима близко

Смысл высказываний 2 и 3 тесно связан со смыслом 1:
если $x = \text{«зима близко»}$, то

1: x

2: известно, что x

3: допустимо x

«Известно» и «допустимо» — это **эпистемические модальности**
(**модальности знания**) (др.-греч. ἐπιστήμη — знание)

Если «известно» (**всеобщее знание**)

и «допустимо» (**частное, некоторое знание**) трактовать как \forall и \exists ,
то на какие «предметы знаний» указывают эти кванторы?

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

- 1: Зима близко
- 2: Зима должна быть близко
- 3: Зима имеет право быть близко

Смысл высказываний 2 и 3 тесно связан со смыслом 1:

если $x = \text{«зима близко}»$, то

- 1: x 2: должно быть x 3: имеет право быть x

«Должен» и «имеет право» — это деонтические модальности
(модальности долга)

(др.-греч. δέον — должное)

Как связан смысл фраз «это так» и «это должно быть так»?

В рациональных высказываниях используется великое множество разных модальностей, и точно описать их смысл в рамках классической логики — очень непростая задача

Модальности

Чаще всего (*хотя и не всегда*) в высказываниях используются модальности двух двойственных видов:

Модальность необходимого

необходимо

обязательно

всегда

должен

знает

доказуемо



Модальность возможного

возможно

не исключено

иногда

имеет право

предполагает

непротиворечиво



Хотелось бы иметь единообразный способ определения смысла модальностей \square и \lozenge — и такой способ используется в

модальных логиках

Модальные логики: синтаксис

Синтаксис формул пропозициональных модальных логик над множеством переменных Var:

$$\varphi ::= x \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\Box\varphi) \mid (\Diamond\varphi),$$

где φ — формула и $x \in \text{Var}$

Это синтаксис формул логики высказываний, расширенный возможностью расстановки модальностей необходимого и возможного над любыми (под)формулами

Приоритет операций: \neg , \Box и \Diamond ; затем $\&$; затем \vee ; затем \rightarrow

Пример формулы: $\Diamond x \& \Box \neg \Diamond(x \vee y)$

«возможно x , и при этом необходимо невозможно, что x или y »

В этой формуле пока не говорится,
что означают «необходимость» и «возможность»:
определение этих понятий — часть семантики формулы

Модальные логики: семантика Кripке

Описание семантики начнём с примера: *Зима бывает близко*

Представим себе любое строгое определение зимы и того, в каких случаях зима считается близкой

Если остановить время и задаться вопросом, близко зима или нет, то ответ на этот вопрос (да или нет) можно задать как значение пропозициональной переменной x

Время течёт, и мир меняется, как и значение x :

сейчас ————— через минуту ————— через месяц ————— через полгода
 ☒ ☒ ☒ ☒

Ответ на вопрос «◊x?» в так меняющемся мире — да, x бывает

Изменение мира можно представить себе и по-другому:
существует много взаимосвязанных миров с разными значениями x ,
и в семантике \Diamond комбинируются значения x многих миров

Модальные логики: семантика Кripке

Модель Кripке (над переменными Var) — это система (W, R, ξ) , где

- ▶ W — множество состояний (миров)
- ▶ $R \subseteq W \times W$ — отношение переходов между мирами
 - ▶ $\ll R(w_1, w_2) \gg = \ll w_1 \rightarrow w_2 \gg$
 - ▶ Если $w \rightarrow w'$, то w' — мир, альтернативный для w (w -альтернатива)
- ▶ $\xi : W \rightarrow 2^{\text{Var}}$ — оценка переменных для каждого мира
 - ▶ $\ll x \in \xi(w) \gg = \ll \text{переменная } x \text{ истинна в мире } w \gg$

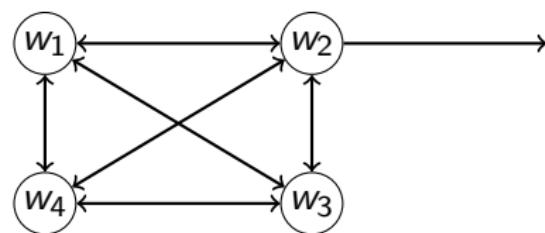
Шкала Кripке (*Kripke frame*),

на которой основывается модель (W, R, ξ) , — это пара (W, R)

Модель Кripке — это интерпретация для формул модальной логики

Модальные логики: семантика Кripке

Например, $(\text{Var} = \{a\})$



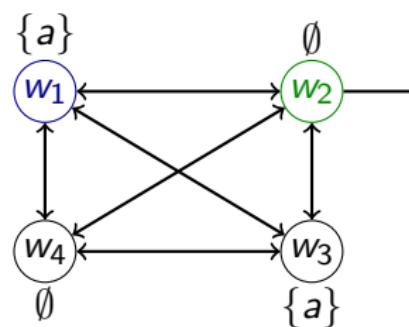
— это шкала Кripке

Модальные логики: семантика Кripке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, w \models x \Leftrightarrow x \in \xi(w)$ ($x \in \text{Var}$)
- ▶ $\mathcal{I}, w \models \varphi \& \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \models \varphi \text{ и } \mathcal{I}, w \models \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \models \varphi \text{ или } \mathcal{I}, w \models \psi$

Например, ($\text{Var} = \{a\}$)



— это модель Кripке (\mathcal{I})

$$\mathcal{I}, w_1 \models a, \quad \mathcal{I}, w_2 \not\models a$$

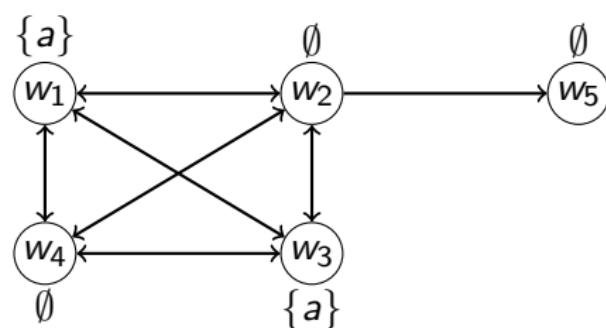
Модальные логики: семантика Кripке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, w \models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \not\models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \models \neg \varphi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \not\models \varphi$

Например,

($\text{Var} = \{a\}$)



— это модель Кripке (\mathcal{I})

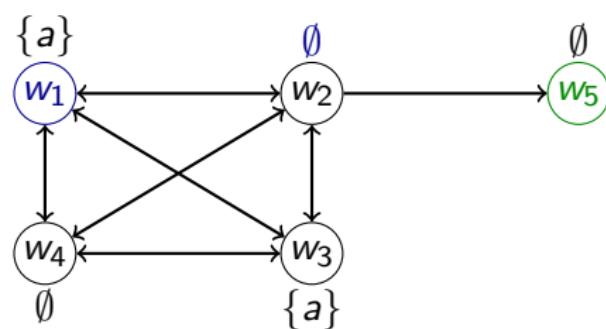
Модальные логики: семантика Кripке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi \Leftrightarrow$
для любой w -альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например,

($\text{Var} = \{a\}$)



— это модель Кripке (\mathcal{I})

$$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a, \quad \mathcal{I}, w_5 \models \Box a$$

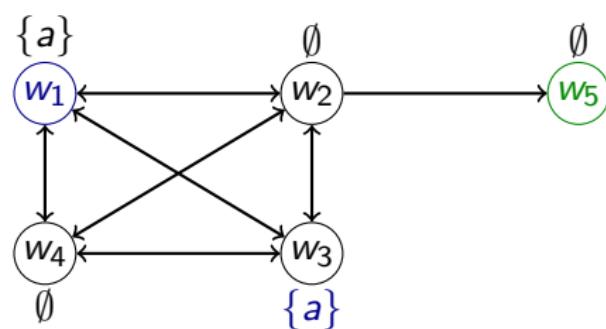
Модальные логики: семантика Кripке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow$
существует w -альтернатива w' ,
такая что верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например,

(Var = {a})



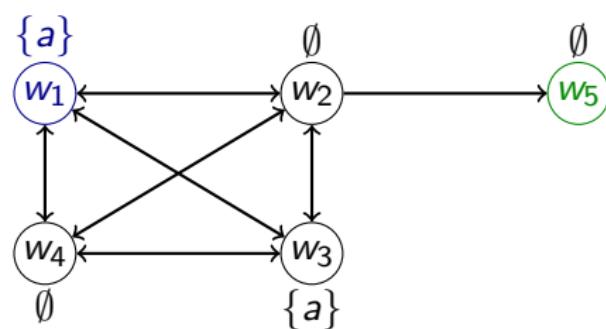
— это модель Кripке (\mathcal{I})

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a, \quad \mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond a$$

Модальные логики: семантика Кripке

Например,

(Var = {a})



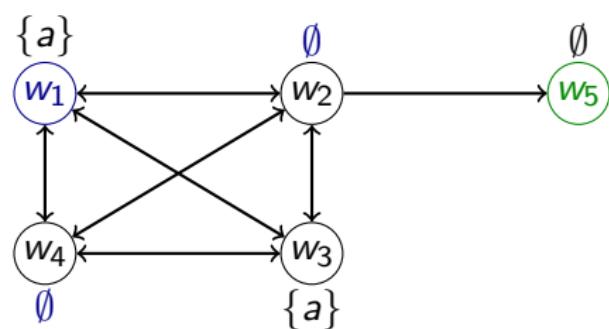
— это модель Кripке (\mathcal{I})

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Box\Diamond a, \quad \mathcal{I}, w_5 \models \Box\Diamond a$$

Модальные логики: семантика Кripке

Например,

(Var = {a})



— это модель Кripке (\mathcal{I})

$$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Diamond \Box a, \quad \mathcal{I}, w_2 \models \Diamond \Box a, \quad , \mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond \Box a$$

Модальные логики: семантика Кripке

Пусть \mathcal{F} — шкала Кripке, \mathcal{I} — модель Кripке, и φ, ψ — формулы модальной логики

Тогда

- ▶ формула φ истинна в модели \mathcal{I} ($\mathcal{I} \models \varphi$), если для любого мира w модели \mathcal{I} верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- ▶ формула φ истинна на шкале \mathcal{F} ($\mathcal{F} \models \varphi$), если для любой модели Кripке \mathcal{J} , основанной на \mathcal{F} , верно $\mathcal{J} \models \varphi$
- ▶ формула φ общезначима ($\models \varphi$), если для любой шкалы \mathcal{F} верно $\mathcal{F} \models \varphi$
- ▶ формулы φ и ψ равносильны ($\varphi \sim \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение. Для любой формулы φ верно: $\Box\varphi \sim \neg\Diamond\neg\varphi$

Доказательство. «Для любой альтернативы верно φ » = «Не существует альтернативы, такой что не- φ » ▼

Утверждение. Для любой формулы φ верно: если $\models\varphi$, то $\models\Box\varphi$

Доказательство. Если φ верно в любом мире любой модели, то φ верно и в любой альтернативе любого мира любой модели ▼

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение. Для любых формул φ, ψ верно:

$$\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$$

Доказательство.

Предположим, что $\not\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

Тогда существуют модель $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мир w , такие что $\mathcal{I}, w \not\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

Тогда

- ▶ $\mathcal{I}, w \models \Box(\varphi \rightarrow \psi)$, а значит,
для каждой w -альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi \rightarrow \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi$, а значит, для каждой w -альтернативы w'
верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$ — и, по **семантике связки \rightarrow** , $\mathcal{I}, w' \models \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \not\models \Box\psi$, а значит, существует w -альтернатива w' ,
такая что $\mathcal{I}, w' \not\models \psi$, что **противоречит** предыдущему пункту ▼