

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 39

Арифметические интерпретации и теории

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Арифметика

(раздел математики, предметом которого являются числа)

занимает особо важное место в математике

В связи с этим уделим чуть больше внимания теориям, предназначенным для анализа арифметических теорем

$Ar[X; Const; Func; Pred]$ — так будем обозначать

арифметическую интерпретацию сигнатуры $\langle Const, Func, Pred \rangle$

над множеством чисел X :

- ▶ Предметная область: X
- ▶ $Const \subseteq X$, и оценкой числа является само число
- ▶ $Func$ и $Pred$ содержат символы известных арифметических операций и отношений, оценивающиеся общепринятым арифметическим способом
 - ▶ Например, $+$, $-$, \cdot , $=$, \neq , $<$, \dots
 - ▶ Все отклонения в сторону «неизвестного» будут поясняться отдельно

В части курса, посвящённой аксиоматическим теориям, **арифметикой** будем называть теорию арифметической интерпретации

В частности, особое внимание будет уделено двум видам арифметик:

- ▶ **Формальная арифметика** — теория интерпретации

$$Ar[\mathbb{N}_0; 0; \mathbf{s}, +, \cdot; =]$$

- ▶ $\mathbf{s}^{(1)}$ — функциональный символ со следующей оценкой: $\bar{\mathbf{s}}(x) = x + 1$

- ▶ **Арифметика Пресбургера** — **полная** теория интерпретации

$$Ar[\mathbb{N}_0; 0; \mathbf{s}, +; =]$$

Формальная арифметика кажется достаточно узкой:

«всего лишь» целые числа, сложение, умножение да равенство — а как же все остальные операции и отношения?

А арифметика Пресбургера кажется совсем тривиальной:

даже умножения нет

Далее будет показано, эти впечатления обманчивы