Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 39

Арифметические интерпретации и теории

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

Арифметика
(*раздел математики, предметом которого являются чи́сла*)
занимает особо важное место в математике

В связи с этим уделим чуть больше внимания теориям,
предназначенным для анализа арифметических теорем

$Ar[X; \mathsf{Const}; \mathsf{Func}; \mathsf{Pred}]$ — так будем обозначать
арифметическую интепретацию сигнатуры $\langle \mathsf{Const}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$
над множеством чисел X:

- Предметная область: X
- $\mathsf{Const} \subseteq X$, и оценкой числа́ является само число
- Func и Pred содержат символы
  известных арифметических операций и отношений,
  оценивающиеся общепринятым арифметическим способом
  - Например, $+$, $-$, $\cdot$, $=$, $\neq$, $<$, ...
  - Все отклонения в сторону «неизвестного» будут поясняться отдельно

В части курса, посвящённой аксиоматическим теориям, арифметикой будем называть теорию арифметической интерпретации

В частности, особое внимание будет уделено двум видам арифметик:

- Формальная арифметика — теория интерпретации
$$Ar[\mathbb{N}_0; 0; \mathbf{s}, +, \cdot; =]$$
  - $\mathbf{s}^{(1)}$ — функциональный символ со следующей оценкой: $\overline{s}(x) = x + 1$
- Арифметика Пресбургера — полная теория интерпретации
$$Ar[\mathbb{N}_0; 0; \mathbf{s}, +; =]$$

Формальная арифметика кажется достаточно узкой:
«всего лишь» целые числа, сложение, умножение да равенство — а как же все остальные операции и отношения?

А арифметика Пресбургера кажется совсем тривиальной:
даже умножения нет

Далее будет показано, эти впечатления обманчивы

На примере этих двух видов арифметик будут затронуты,
в частности, вопросы

- выразительности и выразимости:
  - Насколько широкий класс утверждений
    может быть сформулирован в выбранной сигнатуре?
  - Как соотносятся между собой такие классы утверждений
    для разных сигнатур?
  - Можно ли использовать в утверждениях арифметические понятия,
    отсутствующие в сигнатуре? (И какие, и как?)
- разрешимости:
  - Какие арифметические понятия достаточно включить в сигнатуру,
    чтобы автоматическое доказательство теорем стало невозможным?
  - Для более узких сигнатур — как может быть устроено
    такое автоматическое доказательство?