

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 39

Определения и выразимость

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Вступление

Вспомним пример, с которого начиналось обсуждение аксиоматических теорий:

Утверждение. $1 + 1 = 2$

Определение. $2 = s(1)$

Определение. $1 = s(0)$

...

Интуиция подсказывает, что можно упростить доказательство утверждения, **подставив определения** чисел 1 и 2 в утверждение (заменив исходную формулу на " $s(0) + s(0) = s(s(0))$ ")

Более широко, кажется интуитивно верным, что если в нашем распоряжении есть число 0 и функция прибавления единицы (s), то использование всех натуральных чисел в высказываниях становится избыточным, так как они **выражаются** через 0 и s

Попробуем сформулировать и обосновать всё это ("определение" и его "подстановка", "выражение" одних понятий через другие)
математически строго

Определения сигнатурных символов

Сигнатурными символами будем называть константы, функциональные символы и предикатные символы

Для технической простоты будем считать (как и в *блоке 17*), что константа — это функциональный символ местности 0

Рассмотрим сигнатуру σ , содержащую сигнатурный символ s

σ_{-s} — обозначение сигнатуры, получающаяся из σ удалением символа s

$\sigma'_{+s} = \sigma$, если $\sigma' = \sigma_{-s}$

Определение сигнатурного символа s местности n в сигнатуре σ_{-s} — это формула сигнатуры σ_{-s} вида

- ▶ $\varphi(\tilde{x}^n)$, если s — предикатный символ
- ▶ $\varphi(\tilde{x}^n, y)$, если s — функциональный символ

Определения понятий в интерпретации

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle$ сигнатуры σ

Будем говорить, что формулой $\varphi(\tilde{x}^n)$ в \mathcal{I} **реализуется** такое n -местное отношение P :

$$P(\tilde{d}^n) = \mathfrak{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$$

Определением отношения $P : D^n \rightarrow \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$ будем называть формулу $\Phi_P^{\mathcal{I}}(\tilde{x}^n)$, реализующую P в \mathcal{I}

Графиком функции $f : D^n \rightarrow D$ называется отношение местности $(n+1)$, содержащее те и только те наборы (\tilde{d}^n, d) , для которых верно $f(\tilde{d}^n) = d$

Определением функции $f : D^n \rightarrow D$ будем называть формулу $\Phi_f^{\mathcal{I}}(\tilde{x}^n, y)$, реализующую график f в \mathcal{I}

Для технической простоты **предмет** будем считать функцией местности 0

Понятиями (интерпретации \mathcal{I}) будем называть функции и отношения, определённые над предметной областью \mathcal{I}

Понятие ξ называется **выразимым** в интерпретации \mathcal{I} , если существует определение ξ в \mathcal{I}

Определения понятий в интерпретации

Примеры определений в интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, s; =]$:

- ▶ Определение числа 2:

$$y = s(s(0))$$

- ▶ Определения числа 0:

$$y = 0$$
$$\forall x (y + x = x)$$

- ▶ Определение операции возведения в квадрат (\cdot^2):

$$y = x_1 \cdot x_1$$

- ▶ Определение отношения нестрогого неравенства (\geq):

$$\exists z (x_1 = x_2 + z)$$

Наличие таких определений означает, что числа 2 и 0, операция \cdot^2 и отношение \geq **выразимы** в арифметической интерпретации

Замечание. определения такого вида повсеместно применяются в математике и имеют много названий: **явные определения**; **сокращения**; **сокращающие определения**; **описательные определения**; ...

Определяющие аксиомы

Определяющая аксиома для сигнатурного символа s местности n и определения φ этого символа — это формула $Ax[s, \varphi]$ вида

- ▶ $\forall \tilde{x}^n (s(\tilde{x}^n) \leftrightarrow \varphi)$, если s — предикатный символ
- ▶ $\forall \tilde{x}^n (\varphi \{y/s(\tilde{x}^n)\})$, если s — функциональный символ

Сигнатурный символ s будем называть **соответствующим** понятию ξ , если их местности равны и либо ξ — функция и s — функциональный символ, либо ξ — отношение и s — предикатный символ

Рассмотрим интерпретацию \mathcal{I} , понятие ξ и соответствующий сигнатурный символ s , не входящий в сигнатуру \mathcal{I}

Определяющей аксиомой для ξ будем называть аксиому $Ax[s, \Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}]$

Примеры аксиом, определяющих в интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, s; =]$

- ▶ число 2: $2 = s(s(0))$
- ▶ операцию возведения в квадрат (\cdot^2): $\forall x_1 (x_1^2 = x_1 \cdot x_1)$
- ▶ отношение нестрогого неравенства (\geq):

$$\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 \geq x_2) \leftrightarrow \exists z (x_1 = x_2 + z))$$

Расширение теорий

$\mathcal{T}^{+s/\varphi}$ — так обозначим теорию $\mathcal{T} \cup \{Ax[s, \varphi]\}$ сигнатуры σ , где \mathcal{T} — теория сигнатуры σ_{-s}

\mathcal{I}^{-s} — так обозначим интерпретацию, получающуюся из \mathcal{I} удалением сигнатурного символа s и его оценки

Теорема (о сужении модели теории)

Если \mathcal{I} — модель теории $\mathcal{T}^{+s/\varphi}$, то \mathcal{I}^{-s} — модель теории \mathcal{T}

Доказательство.

Положим, что \mathcal{I} — модель теории $\mathcal{T}^{+s/\varphi}$

Так как $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{+s/\varphi}$, верно и $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$

Так как в формулах из \mathcal{T} не содержится символ s , верно и $\mathcal{I}^{-s} \models \mathcal{T}$ ▼

Расширение теорий

$\mathcal{I}^{+s/\xi}$ — так обозначим интерпретацию, получающуюся из \mathcal{I} добавлением сигнатурного символа s и оценкой этого символа понятием ξ

Теорема (о расширении модели теории). Если \mathcal{I} — модель теории \mathcal{T} сигнатуры σ_{-s} и ξ — понятие \mathcal{I} с соответствующим сигнатурным символом s , то $\mathcal{I}^{+s/\xi}$ — модель теории $\mathcal{T}^{+s/\Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}}$

Доказательство.

Положим, что \mathcal{I} — модель теории \mathcal{T}

Тогда верно и $\mathcal{I}^{+s/\xi} \models \mathcal{T}$, и остаётся показать, что $\mathcal{I}^{+s/\xi} \models Ax[s, \Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}]$

Подробно разберём только один случай: $\xi : D^n \rightarrow D$ — функция

Тогда для любых предметов \tilde{d}^n интерпретации \mathcal{I} верно $\mathcal{I} \models \Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}[\tilde{d}^n, \xi(\tilde{d}^n)]$, а значит, и $\mathcal{I}^{+s/\xi} \models \Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}\{y/s(\tilde{x}^n)\}[\tilde{d}^n]$

Следовательно, верно и $\mathcal{I}^{+s/\xi} \models \forall \tilde{x}^n (\Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}\{y/s(\tilde{x}^n)\}) \blacktriangledown$

Как подставляются определения

Подстановка определения предикатного символа

Вход: формула φ , предикатный символ P и его определение $\psi(\tilde{x}^n)$

Однократная подстановка определения:

- ▶ Произвольно выберем подформулу A формулы φ вида $P(t_1, \dots, t_n)$
- ▶ *Переименованием связанных переменных* получим из ψ *равносильную* формулу ψ' , для которой *правильна* подстановка $\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$
- ▶ Заменим выбранный атом A на $\psi'\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$

Полная подстановка: пока в φ содержится хотя бы одно вхождение символа P , выполняется однократная подстановка

Пример: подстановка определения $\exists z (x_1 = x_2 + z)$ предикатного символа $\geq^{(2)}$

$$\begin{aligned} & \forall x ((1 \geq x) \& (x \geq z)) \\ \mapsto & \forall x (\exists z (1 = x + z) \& (x \geq z)) \\ \mapsto & \forall x (\exists z (1 = x + z) \& \exists u (x = z + u)) \end{aligned}$$

Как подставляются определения

Подстановка определения функционального символа

Дано: формула φ , функциональный символ f и его определение $\psi(\tilde{x}^n, y)$

Однократная подстановка определения:

- ▶ Произвольно выберем терм вида $f(t_1, \dots, t_n)$ и атомарную подформулу A формулы φ , в которую входит этот терм
- ▶ Выберем переменную z , не входящую в A
- ▶ *Переименованием связанных переменных* получим из ψ *равносильную* формулу ψ' , для которой *правильна* подстановка $\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z\}$
- ▶ Получим из A атом B , заменив выбранный терм $f(t_1, \dots, t_n)$ на z
- ▶ Заменим выбранный атом A на $\exists z (B \ \& \ \psi\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z\})$

Полная подстановка: пока в φ содержится хотя бы одно вхождение символа f , выполняется однократная подстановка

Пример:

подстановка определения $y = x_1 \cdot x_1$ функционального символа \cdot^2

$$\begin{aligned} \exists x (x^2 = y^2) &\mapsto \exists x (\exists z_1 (z_1 = y^2 \ \& \ z_1 = x \cdot x)) \\ \mapsto \exists x (\exists z_1 (\exists z_2 (z_1 = z_2 \ \& \ z_2 = y \cdot y) \ \& \ z_1 = x \cdot x)) \end{aligned}$$

Теорема о подстановке определения

Пусть \mathcal{I} — интерпретация сигнатуры σ_{-s} , ξ — понятие \mathcal{I} с соответствующим сигнатурным символом s , и φ' — формула, полученная из формулы $\varphi(\tilde{x}^n)$ сигнатуры σ полной подстановкой определения $\Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}$ символа s .

Тогда для любого набора предметов \tilde{d}^n верно

$$\mathcal{I}^{+s/\xi} \models \varphi[\tilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi'[\tilde{d}^n]$$

Доказательство.

Справедливость теоремы напрямую следует из двух фактов:

1. $\mathcal{I}^{+s/\xi} \models \varphi[\tilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{+s/\xi} \models \varphi'[\tilde{d}^n]$
2. $\mathcal{I}^{+s/\xi} \models \varphi'[\tilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi'[\tilde{d}^n]$

Второй факт следует из того, что в φ' не содержится символ s

Осталось обосновать первый факт

Теорема о подстановке определения

$$\mathcal{I}^{+s/\xi} \models \varphi[\tilde{d}^n] \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \varphi'[\tilde{d}^n]$$

Доказательство. $(\mathcal{I}^{+s/\xi} \models \varphi[\tilde{d}^n] \Leftrightarrow \mathcal{I}^{+s/\xi} \models \varphi'[\tilde{d}^n])$

Подробно разберём только один случай: ξ — отношение местности k
(для функции ξ всё аналогично, но технически сложнее)

Достаточно показать, что равносильность справедлива для формулы φ' , получающейся из φ заменой атома $s(t_1, \dots, t_k)$ на формулу $\Phi_{\xi}^{\mathcal{I}'}\{x_1/t_1, \dots, x_k/t_k\}$ согласно однократной подстановке определения $\Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}$

По определению $\Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}$, для любого набора предметов \tilde{d}^k верно

$$\mathcal{I}^{+s/\xi} \models s(\tilde{x}^k)[\tilde{d}^k] \Leftrightarrow \mathcal{I}^{+s/\xi} \models \Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}[\tilde{d}^k] \Leftrightarrow \mathcal{I}^{+s/\xi} \models \Phi_{\xi}^{\mathcal{I}'}[\tilde{d}^k]$$

Значит, если в $s(t_1, \dots, t_k)$ содержится m свободных переменных, то для любого набора предметов \tilde{d}^m верно

$$\mathcal{I}^{+s/\xi} \models s(t_1, \dots, t_k)[\tilde{d}^m] \Leftrightarrow \mathcal{I}^{+s/\xi} \models \Phi_{\xi}^{\mathcal{I}'}\{x_1/t_1, \dots, x_k/t_k\}[\tilde{d}^m]$$

Остаток доказательства устроен так же, как и в доказательстве теоремы о равносильной замене (блок 15) ▼

Пример напоследок

В интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, s; =]$ выразимы, в числе прочего:

- ▶ любое натуральное число N :

$$y = \underbrace{s(s(\dots s(0) \dots))}_{N \text{ раз}}$$

- ▶ свойство $\text{div}(x_1, x_2)$ “ x_1 является делителем x_2 ”:

$$\exists z (x_2 = x_1 \cdot z)$$

- ▶ операция вычисления наибольшего общего делителя:

$$\text{div}(y, x_1) \ \& \ \text{div}(y, x_2) \ \& \ \forall u (\text{div}(u, x_1) \ \& \ \text{div}(u, x_2) \rightarrow \text{div}(u, y))$$

- ▶ свойство even чётности чисел:

$$\exists y (x_1 = y \cdot 2)$$

- ▶ свойство prime простоты чисел:

$$\forall y \forall z ((x_1 = y \cdot z) \rightarrow (y = 1) \vee (z = 1))$$

- ▶ свойство согласованности числа x с гипотезой Гольдбаха:

$$\text{even}(x) \ \& \ (x \geq 4) \rightarrow \exists y \exists z (\text{prime}(y) \ \& \ \text{prime}(z) \ \& \ (x = y + z))$$