Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 39

Определения и выразимость

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Вступление

Вспомним пример, с которого начиналось обсуждение аксиоматических теорий:

Утверждение. $1 + 1 = 2$

Определение. $2 = \mathbf{s}(1)$

Определение. $1 = \mathbf{s}(0)$

...

Интуиция подсказывает, что можно *упростить* доказательство утверждения, **подставив определения** чисел 1 и 2 в утверждение (заменив исходную формулу на “$\mathbf{s}(0) + \mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(0))$”)

Более широко, кажется интуитивно верным, что если в нашем распоряжении есть число 0 и функция прибавления единицы ($\mathbf{s}$), то использование всех натуральных чисел в высказываниях становится избыточным, так как они **выражаются** через 0 и $\mathbf{s}$

Попробуем сформулировать и обосновать всё это (“определение” и его “подстановка”, “выражение” одних понятий через другие) **математически строго**

Определения сигнатурных символов

Сигнатурными символами будем называть константы, функциональные символы и предикатные символы

Для технической простоты будем считать (как и в *блоке 17*), что константа — это функциональный символ местности 0

Рассмотрим сигнатуру σ, содержащую сигнатурный символ s

$\sigma_{-\mathrm{s}}$ — обозначение сигнатуры, получающаяся из σ удалением символа s

$\sigma'_{+\mathrm{s}} = \sigma$, если $\sigma' = \sigma_{-\mathrm{s}}$

Определение сигнатурного символа s местности *n* в сигнатуре $\sigma_{-\mathrm{s}}$ — это формула сигнатуры $\sigma_{-\mathrm{s}}$ вида

- $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, если s — предикатный символ
- $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}, \mathtt{y})$, если s — функциональный символ

Определения понятий в интерпретации

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{I} = \left\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \right\rangle$ сигнатуры σ

Будем говорить, что формулой $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ в $\mathcal{I}$ реализуется такое n-местное отношение P:
$$P(\widetilde{d}^n) = \mathbb{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$$

Определением отношения $P : D^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ будем называть формулу $\Phi_P^{\mathcal{I}}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, реализующую P в $\mathcal{I}$

Графиком функции $f : D^n \to D$ называется отношение местности $(n+1)$, содержащее те и только те наборы $(\widetilde{d}^n, d)$, для которых верно $f(\widetilde{d}^n) = d$

Определением функции $f : D^n \to D$ будем называть формулу $\Phi_f^{\mathcal{I}}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}, \mathtt{y})$, реализующую график f в $\mathcal{I}$

Для технической простоты *предмет* будем считать функцией местности 0

Понятиями (интерпретации $\mathcal{I}$) будем называть функции и отношения, определённые над предметной областью $\mathcal{I}$

Понятие ξ называется выразимым в интерпретации $\mathcal{I}$, если существует определение ξ в $\mathcal{I}$

Определения понятий в интерпретации

Примеры определений в интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathsf{s}; =]$:

- Определение числа 2:
$$y = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$
- Определения числа 0:
$$y = 0$$
$$\forall x\ (y + x = x)$$
- Определение операции возведения в квадрат $(\cdot^2)$:
$$y = x_1 \cdot x_1$$
- Определение отношения нестрогого неравенства $(\geq)$:
$$\exists z\ (x_1 = x_2 + z)$$

Наличие таких определений означает, что чи́сла 2 и 0, операция $\cdot^2$ и отношение $\geq$ **выразимы** в арифметической интерпретации

Замечание. определения такого вида повсеместно применяются в математике и имеют много названий: явные определения; сокращения; сокращающие определения; описательные определения; …

Определяющие аксиомы

Определяющая аксиома для сигнатурного символа s местности n и определения φ этого символа — это формула $Ax[\mathrm{s}, \varphi]$ вида

- $\forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ (\mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}) \leftrightarrow \varphi)$, если s — предикатный символ
- $\forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ (\varphi\,\{\mathrm{y}/\mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})\})$, если s — функциональный символ

Сигнатурный символ s будем называть соответствующим понятию ξ, если их местности равны и либо ξ — функция и s — функциональный символ, либо ξ — отношение и s — предикатный символ

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{I}$, понятие ξ и соответствующий сигнатурный символ s, не входящий в сигнатуру $\mathcal{I}$

Определяющей аксиомой для ξ будем называть аксиому $Ax[\mathrm{s}, \Phi_\xi^{\mathcal{I}}]$

Примеры аксиом, определяющих в интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathbf{s}; =]$

- число 2: $\mathbf{2} = \mathrm{s}(\mathrm{s}(\mathbf{0}))$
- операцию возведения в квадрат $(\cdot^2)$: $\forall \mathrm{x}_1\ ({\mathrm{x}_1}^2 = \mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_1)$
- отношение нестрогого неравенства $(\geq)$:

$$\forall \mathrm{x}_1\ \forall \mathrm{x}_2\ ((\mathrm{x}_1 \geq \mathrm{x}_2) \leftrightarrow \exists \mathrm{z}\ (\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 + \mathrm{z}))$$

Расширение теорий

$\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$ — так обозначим теорию $\mathcal{T} \cup \{Ax[\mathrm{s}, \varphi]\}$ сигнатуры σ, где $\mathcal{T}$ — теория сигнатуры $\sigma_{-\mathrm{s}}$

$\mathcal{I}^{-\mathrm{s}}$ — так обозначим интерпретацию, получающуюся из $\mathcal{I}$ удалением сигнатурного символа s и его оценки

Теорема(*о сужении модели теории*)
Если $\mathcal{I}$ — модель теории $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$, то $\mathcal{I}^{-\mathrm{s}}$ — модель теории $\mathcal{T}$

Доказательство.

Положим, что $\mathcal{I}$ — модель теории $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$

Так как $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$, верно и $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$

Так как в формулах из $\mathcal{T}$ не содержится символ s, верно и $\mathcal{I}^{-\mathrm{s}} \models \mathcal{T}$ ▼

Расширение теорий

$\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi}$ — так обозначим интерпретацию, получающуюся из $\mathcal{I}$ добавлением сигнатурного символа s и оценкой этого символа понятием ξ

Теорема(*о расширении модели теории*). Если $\mathcal{I}$ — модель теории $\mathcal{T}$ сигнатуры $\sigma_{-\mathrm{s}}$ и ξ — понятие $\mathcal{I}$ с соответствующим сигнатурным символом s, то $\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi}$ — модель теории $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\Phi_\xi^{\mathcal{I}}}$

Доказательство.

Положим, что $\mathcal{I}$ — модель теории $\mathcal{T}$

Тогда верно и $\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \mathcal{T}$, и остаётся показать, что $\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models Ax[\mathrm{s}, \Phi_\xi^{\mathcal{I}}]$

Подробно разберём только один случай: $\xi : D^n \to D$ — функция

Тогда для любых предметов $\widetilde{d}^n$ интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \Phi_\xi^{\mathcal{I}}[\widetilde{d}^n, \xi(\widetilde{d}^n)]$, а значит, и $\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \Phi_\xi^{\mathcal{I}}\{\mathrm{y}/\mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})\}[\widetilde{d}^n]$

Следовательно, верно и $\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \forall \mathrm{x}\ (\Phi_\xi^{\mathcal{I}}\{\mathrm{y}/\mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})\})$ ▼

Как подставляются определения

Подстановка определения предикатного символа

Вход: формула φ, предикатный символ P и его определение $\psi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})$

Однократная подстановка определения:

- Произвольно выберем подформулу A формулы φ вида $\mathrm{P}(t_1, \dots, t_n)$
- *Переименованием связанных переменных* полу́чим из ψ *равносильную* формулу ψ', для которой *правильна* подстановка $\{\mathrm{x}_1/t_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/t_n\}$
- Заме́ним выбранный атом A на $\psi'\{\mathrm{x}_1/t_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/t_n\}$

Полная подстановка: пока в φ содержится хотя бы одно вхождение символа P, выполняется однократная подстановка

Пример: подстановка определения $\exists \mathrm{z}\ (\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 + \mathrm{z})$ предикатного символа $\geq^{(2)}$

$$
\begin{aligned}
& \forall \mathrm{x}\ ((1 \geq \mathrm{x})\,\&(\mathrm{x} \geq \mathrm{z})) \\
\mapsto \quad & \forall \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{z}\ (\mathrm{x} = 1 + \mathrm{z})\,\&(\mathrm{x} \geq \mathrm{z})) \\
\mapsto \quad & \forall \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{z}\ (\mathrm{x} = 1 + \mathrm{z})\,\&\,\exists \mathrm{u}\ (\mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{u}))
\end{aligned}
$$

Как подставляются определения

Подстановка определения функционального символа

Дано: формула φ, функциональный символ $\mathbf{f}$ и его определение $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}, \mathrm{y})$

Однократная подстановка определения:

- Произвольно выберем терм вида $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)$ и атомарную подформулу A формулы φ, в которую входит этот терм
- Выберем переменную z, не входящую в A
- *Переименованием связанных переменных* полу́чим из ψ *равносильную* формулу ψ', для которой *правильна* подстановка $\{\mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/t_n, \mathrm{y}/\mathrm{z}\}$
- Получим из A атом B, заменив выбранный терм $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)$ на z
- Заме́ним выбранный атом A на $\exists \mathrm{z}\ (B \,\&\, \psi\{\mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/t_n, \mathrm{y}/\mathrm{z}\})$

Полная подстановка: пока в φ содержится хотя бы одно вхождение символа $\mathbf{f}$, выполняется однократная подстановка

Пример:

подстановка определения $\mathrm{y} = \mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_1$ функционального символа $\cdot^2$

$$\exists \mathrm{x}\ (\mathrm{x}^2 = \mathrm{y}^2) \quad \mapsto \quad \exists \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{z}_1\ (\mathrm{z}_1 = \mathrm{y}^2 \,\&\, \mathrm{z}_1 = \mathrm{x} \cdot \mathrm{x}))$$
$$\mapsto \quad \exists \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{z}_1\ (\exists \mathrm{z}_2\ (\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2 \,\&\, \mathrm{z}_2 = \mathrm{y} \cdot \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{z}_1 = \mathrm{x} \cdot \mathrm{x}))$$

Теорема о подстановке определения

Пусть $\mathcal{I}$ — интерпретация сигнатуры $\sigma_{-\mathrm{s}}$, ξ — понятие $\mathcal{I}$ с соответствующим сигнатурным символом s, и φ' — формула, полученная из формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ сигнатуры σ полной подстановкой определения $\Phi_{\xi}^{\mathcal{I}}$ символа s.

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно

$$\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi'[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство.

Справедливость теоремы напрямую следует из двух фактов:

1. $\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \varphi'[\widetilde{d}^n]$
2. $\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \varphi'[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi'[\widetilde{d}^n]$

Второй факт следует из того, что в φ' не содержится символ s

Осталось обосновать первый факт

Теорема о подстановке определения

$$\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi'[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство. $(\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \varphi'[\widetilde{d}^n])$

Подробно разберём только один случай: ξ — отношение местности k (для функции ξ всё аналогично, но технически сложнее)

Достаточно показать, что равносильность справедлива для формулы φ', получающейся из φ заменой атома $\mathrm{s}(t_1, \dots, t_k)$ на формулу $\Phi_\xi^{\mathcal{I}\prime}\{\mathrm{x_1}/t_1, \dots, \mathrm{x_k}/t_k\}$ согласно однократной подстановке определения $\Phi_\xi^{\mathcal{I}}$

По *определению* $\Phi_\xi^{\mathcal{I}}$, для любого набора предметов $\widetilde{d}^k$ верно

$$\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{x}}^k)[\widetilde{d}^k] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \Phi_\xi^{\mathcal{I}}[\widetilde{d}^k] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \Phi_\xi^{\mathcal{I}\prime}[\widetilde{d}^k]$$

Значит, если в $\mathrm{s}(t_1, \dots, t_k)$ содержится m свободных переменных, то для любого набора предметов $\widetilde{d}^m$ верно

$$\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \mathrm{s}(t_1, \dots, t_k)[\widetilde{d}^m] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \Phi_\xi^{\mathcal{I}\prime}\{\mathrm{x_1}/t_1, \dots, \mathrm{x_k}/t_k\}[\widetilde{d}^m]$$

Остаток доказательства устроен так же, как и в доказательстве *теоремы о равносильной замене (блок 15)* ▼

Пример напоследок

В интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathsf{s}; =]$ выразимы, в числе прочего:

- любое натуральное число N:
$$\mathtt{y} = \underbrace{\mathsf{s}(\mathsf{s}(\ldots \mathsf{s}}_{N\text{ раз}}(0)\ldots))$$
- свойство $\mathrm{div}(\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2)$ "$\mathtt{x}_1$ является делителем $\mathtt{x}_2$":
$$\exists \mathtt{z}\ (\mathtt{x}_2 = \mathtt{x}_1 \cdot \mathtt{z})$$
- операция вычисления наибольшего общего делителя:
$$\mathrm{div}(\mathtt{y}, \mathtt{x}_1) \,\&\, \mathrm{div}(\mathtt{y}, \mathtt{x}_2) \,\&\, \forall \mathtt{u}\ (\mathrm{div}(\mathtt{u}, \mathtt{x}_1) \,\&\, \mathrm{div}(\mathtt{u}, \mathtt{x}_2) \to \mathrm{div}(\mathtt{u}, \mathtt{y}))$$
- свойство even чётности чисел:
$$\exists \mathtt{y}\ (\mathtt{x}_1 = \mathtt{y} \cdot 2)$$
- свойство prime простоты чисел:
$$\forall \mathtt{y}\ \forall \mathtt{z}\ ((\mathtt{x}_1 = \mathtt{y} \cdot \mathtt{z}) \to (\mathtt{y} = 1) \vee (\mathtt{z} = 1))$$
- свойство согласованности числá $\mathtt{x}$ с гипотезой Гольдбаха:
$$\mathrm{even}(\mathtt{x}) \,\&\, (\mathtt{x} \geq 4) \to \exists \mathtt{y}\ \exists \mathtt{z}\ (\mathrm{prime}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{prime}(\mathtt{z}) \,\&\, (\mathtt{x} = \mathtt{y} + \mathtt{z}))$$