Модели вычислений

В.А. Захаров

Лекция 11.

1. Реагирующие системы вычислений
2. Автоматы Бюхи
3. ω-регулярные языки
4. Алгоритмические проблемы для автоматов Бюхи
5. Технология применения автоматов Бюхи
6. Другие разновидности ω-автоматов

Реагирующие программы

Два класса информационных систем:

Реагирующие программы

Два класса информационных систем:

1. завершающиеся системы (terminating system) должны рано или поздно прекращать вычисления; результат работы определяется по завершении функционирования системы. Примеры: живые организмы, вычислительные программы, компиляторы, и пр.

Реагирующие программы

Два класса информационных систем:

1. завершающиеся системы (terminating system) должны рано или поздно прекращать вычисления; результат работы определяется по завершении функционирования системы. Примеры: живые организмы, вычислительные программы, компиляторы, и пр.
2. реагирующие системы (reactive systems) должны функционировать бесконечно долго; результат их работы — правильное взаимодействие системы с окружающей средой. Примеры: биологический вид, операционные системы, интерпретаторы, и пр.

Реагирующие программы

Моделями завершающихся систем могут быть конечные и магазинные автоматы, машины Тьюринга и пр. В каждой из этих моделей успешное вычисление — это конечная последовательность переходов, и его результат определяется в самом конце.

Реагирующие программы

Моделями завершающихся систем могут быть конечные и магазинные автоматы, машины Тьюринга и пр. В каждой из этих моделей успешное вычисление — это конечная последовательность переходов, и его результат определяется в самом конце.

Но вычисления реагирующих систем бесконечны!

Как же определить, какие из вычислений реагирующих систем являются успешными, а какие — нет?

И что нужно считать результатом бесконечного вычисления?

Реагирующие программы

Успешность работы реагирующей системы проявляется в том, что в процессе ее бесконечно долгого функционирования определенные события происходят с требуемой частотой и в ожидаемом порядке. Например,

- "Операционная система никогда не зависает".
- "Почтовый сервер бесконечно часто готов к приему сообщений".
- "Всякий раз, когда клиент отправляет запрос, он рано или поздно получает отклик от сервера".

Реагирующие программы

Основные принципы моделирования реагирующих систем.

Реагирующие программы

Основные принципы моделирования реагирующих систем.

1) События, происходящие в системе, можно обозначить буквами некоторого алфавита Σ .

Реагирующие программы

Основные принципы моделирования реагирующих систем.

1) События, происходящие в системе, можно обозначить буквами некоторого алфавита Σ .

2) Под воздействием этих событий система может переходить из одних состояний в другие.

Реагирующие программы

Основные принципы моделирования реагирующих систем.

1) События, происходящие в системе, можно обозначить буквами некоторого алфавита Σ .

2) Под воздействием этих событий система может переходить из одних состояний в другие.

3) Пребывание в некоторых состояниях может расцениваться как признак правильности функционирования системы.

Реагирующие программы

Основные принципы моделирования реагирующих систем.

1) События, происходящие в системе, можно обозначить буквами некоторого алфавита Σ .

2) Под воздействием этих событий система может переходить из одних состояний в другие.

3) Пребывание в некоторых состояниях может расцениваться как признак правильности функционирования системы.

4) Успешное вычисление бесконечно часто подтверждает свою правильность.

Реагирующие программы

Простейшая модель вычислений, функционирование которой подчиняется сформулированным принципам, — это конечные автоматы, работающие над бесконечными словами, или, более коротко,

ω-автоматы

АВТОМАТЫ БЮХИ

Автомат Бюхи — это система $\mathcal{B} = (\Sigma, S, I, F, T)$, где

- Σ — конечный входной алфавит ;
- S — конечное множество состояний ;
- I — подмножество начальных состояний , $I \subseteq S$;
- F — подмножество индикаторных состояний , $F \subseteq S$;
- T — отношение переходов , $T \subseteq S \times \Sigma \times S$.

От конечного автомата он отличается только принципами функционирования.

Автоматы Бюхи

Автомат Бюхи работают над бесконечными словами — бесконечными последовательностями букв алфавита Σ .

ω-словом (сверхсловом) в алфавите Σ называется всякая тотальная функция $\alpha : \mathbb{N} \to \Sigma$, которую мы будем представлять традиционным образом:

$$\alpha = a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1} \ldots$$

Множество всех ω-слов в алфавите Σ обозначим записью Σ^ω . ω-язык — это любое множество ω-слов. Заметим, что в отличие от обычных языков, ω-языки могут иметь континуальную мощность.

АВТОМАТЫ БЮХИ

Вычислением автомата Бюхи $\mathcal{B}$ на ω-слове $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k \dots$ называется всякая максимальная последовательность переходов

$$\sigma = s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} s_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_k} s_k \xrightarrow{a_{k+1}} \cdots,$$

в которой $s_0 \in I$.

АВТОМАТЫ БЮХИ

Вычислением автомата Бюхи $\mathcal{B}$ на ω-слове $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k \dots$ называется всякая максимальная последовательность переходов

$$\sigma = s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} s_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_k} s_k \xrightarrow{a_{k+1}} \dots,$$

в которой $s_0 \in I$.

Для каждого вычисления σ обозначим записью $\inf(\sigma)$ множество всех состояний, встречающихся в последовательности σ бесконечнно часто.

Вычисление σ автомата Бюхи $\mathcal{B}$ называется допускающим , если $F \cap \inf(\sigma) \neq \varnothing$.

АВТОМАТЫ БЮХИ

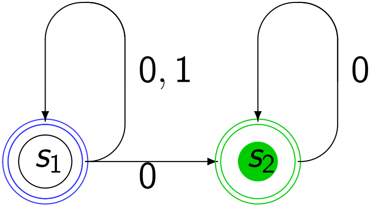
Язык автомата Бюхи $\mathcal{B}$ — это множество ω-слов

$$L(\mathcal{B}) = \{\alpha : \mathcal{B} \text{ имеет успешное вычисление } \sigma \text{ на } \omega\text{-слове } \alpha\}$$

Мы будем говорить, что ω-язык L является автоматным , если $L = L(\mathcal{B})$ для некоторого автомата Бюхи $\mathcal{B}$.

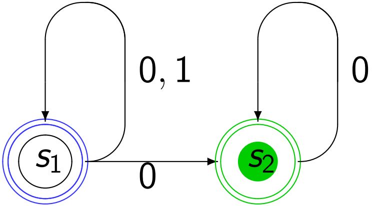
АВТОМАТЫ БЮХИ

Автомат Бюхи $\mathcal{B}_1 : I = \{s_1\}, F = \{s_2\}$



АВТОМАТЫ БЮХИ

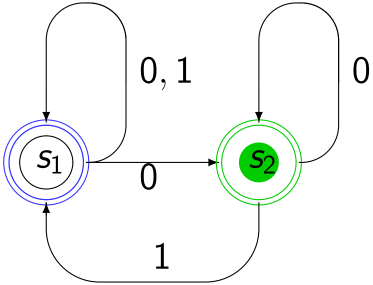
Автомат Бюхи $\mathcal{B}_1 : I = \{s_1\}, F = \{s_2\}$



$L(\mathcal{B}_1) = \{\alpha :$ в ω-слове α конечное число 1 $\}$

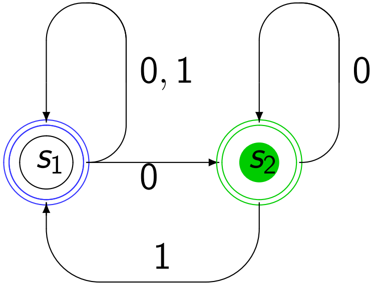
Автоматы Бюхи

Автомат Бюхи $\mathcal{B}_2 : I = \{s_1\}, F = \{s_2\}$



АВТОМАТЫ БЮХИ

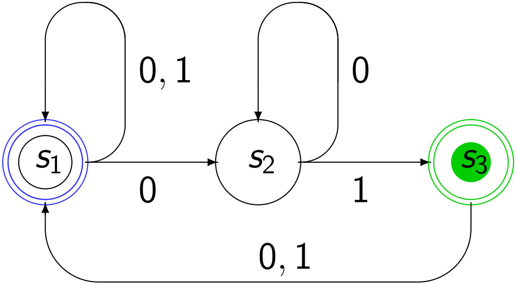
Автомат Бюхи $\mathcal{B}_2 : I = \{s_1\}, F = \{s_2\}$



$L(\mathcal{B}_2) = \{\alpha :$ в ω-слове α бесконечно много 0 $\}$

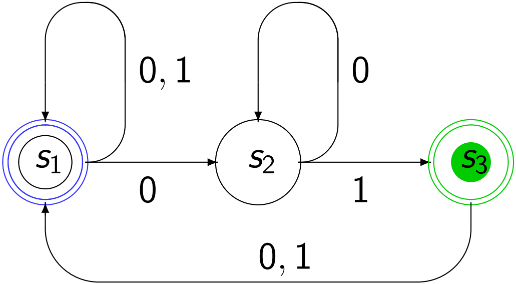
Автоматы Бюхи

Автомат Бюхи $\mathcal{B}_3 : I = \{s_1\}, F = \{s_3\}$



АВТОМАТЫ БЮХИ

Автомат Бюхи $\mathcal{B}_3 : I = \{s_1\}, F = \{s_3\}$



$L(\mathcal{B}_3) = \{\alpha :$ в ω-слове α бесконечно много 0 и 1 $\}$

АВТОМАТЫ БЮХИ

Автомат Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S, I, F, T)$ называется детерминированным , если $|I| = 1$ и отношение переходов T является функцией $T : S \times \Sigma \to S$.

В отличие от обычных конечных автоматов (автоматов Рабина-Скотта) вычислительные возможности детерминированных и недетерминированных автоматов Бюхи неодинаковы.

Утверждение 11.1. ω-язык

$$L = \{\alpha : \text{ в } \omega\text{-слове } \alpha \text{ конечное число } 1\}$$

является автоматным, но $L \neq L(\mathcal{B})$ для любого детерминированного автомата Бюхи $\mathcal{B}$.

Автоматы Бюхи

Доказательство. В автоматности этого ω-языка мы уже убедились. Покажем, что детерминированные автоматы Бюхи не в силах распознать язык L .

Автоматы Бюхи

Доказательство. В автоматности этого ω-языка мы уже убедились. Покажем, что детерминированные автоматы Бюхи не в силах распознать язык L .

Рассмотрим произвольный детерминированный автомат Бюхи $\mathcal{B}$ такой, что $L \subseteq L(\mathcal{B})$. Предположим, что автомат $\mathcal{B}$ имеет n состояний.

АВТОМАТЫ БЮХИ

Доказательство. В автоматности этого ω-языка мы уже убедились. Покажем, что детерминированные автоматы Бюхи не в силах распознать язык L .

Рассмотрим произвольный детерминированный автомат Бюхи $\mathcal{B}$ такой, что $L \subseteq L(\mathcal{B})$. Предположим, что автомат $\mathcal{B}$ имеет n состояний. Тогда ω-слово

$$\underbrace{00\dots00}_{n+1\ \text{раз}}1\underbrace{00\dots00}_{n+1\ \text{раз}}1\dots1\underbrace{00\dots00}_{n+1\ \text{раз}}1\dots$$

также принадлежит языку $L(\mathcal{B})$ Почему?

QED

Автоматы Бюхи

Как можно охарактеризовать ω-языки, распознаваемые детерминированными автоматами Бюхи?

Автоматы Бюхи

Как можно охарактеризовать ω-языки, распознаваемые детерминированными автоматами Бюхи?

Например, так.

Пусть $U, U \subseteq \Sigma^*$, — произвольный язык.
Обозначим записью $Lim(U)$ ω-язык

$$Lim(U) = \{\alpha : \text{ бесконечно много префиксов } \omega\text{-слова } \alpha \text{ принадлежат языку } U\}.$$

Автоматы Бюхи

Как можно охарактеризовать ω-языки, распознаваемые детерминированными автоматами Бюхи?

Например, так.

Пусть $U, U \subseteq \Sigma^*$, — произвольный язык. Обозначим записью $Lim(U)$ ω-язык

$$Lim(U) = \{\alpha : \text{ бесконечно много префиксов } \omega\text{-слова } \alpha \text{ принадлежат языку } U\}.$$

Задача 1 [Трудная]. Докажите, что ω-язык L распознается детерминированным автоматом Бюхи тогда и только тогда, когда $L = Lim(U)$ для некоторого **регулярного** языка U .

АВТОМАТЫ БЮХИ

Класс ω-языков, распознаваемых автоматами Бюхи, замкнут относительно операций объединения и пересечения.

Утверждение 11.2. Для любых автоматов Бюхи $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B}_\cup$, что $L(\mathcal{B}_1) \cup L(\mathcal{B}_2) = L(\mathcal{B}_\cup)$.

АВТОМАТЫ БЮХИ

Класс ω-языков, распознаваемых автоматами Бюхи, замкнут относительно операций объединения и пересечения.

Утверждение 11.2. Для любых автоматов Бюхи $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B}_\cup$, что $L(\mathcal{B}_1) \cup L(\mathcal{B}_2) = L(\mathcal{B}_\cup)$.

Доказательство. Если $\mathcal{B}_i = (\Sigma, S_i, I_i, F_i, T_i), i = 1, 2,$ и $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то $\mathcal{B}_\cup = (\Sigma, S_1 \cup S_2, I_1 \cup I_2, F_1 \cup F_2, T_1 \cup T_2)$. QED

Автоматы Бюхи

Класс ω-языков, распознаваемых автоматами Бюхи, замкнут относительно операций объединения и пересечения.

Утверждение 11.2. Для любых автоматов Бюхи $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B}_\cup$, что $L(\mathcal{B}_1) \cup L(\mathcal{B}_2) = L(\mathcal{B}_\cup)$.

Доказательство. Если $\mathcal{B}_i = (\Sigma, S_i, I_i, F_i, T_i), i = 1, 2,$ и $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то $\mathcal{B}_\cup = (\Sigma, S_1 \cup S_2, I_1 \cup I_2, F_1 \cup F_2, T_1 \cup T_2)$. QED

Утверждение 11.3. Для любых автоматов Бюхи $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B}_\cap$, что $L(\mathcal{B}_1) \cap L(\mathcal{B}_2) = L(\mathcal{B}_\cap)$.

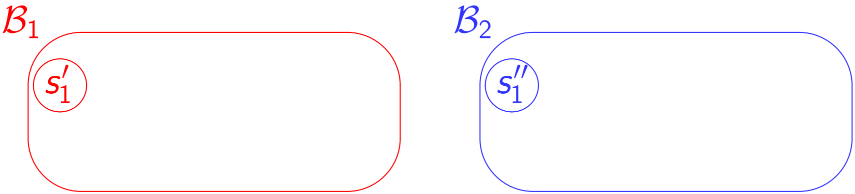
АВТОМАТЫ БЮХИ

Доказательство. Если $\mathcal{B}_i = (\Sigma, S_i, I_i, F_i, T_i), i = 1, 2,$ и $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то автомат Бюхи $\mathcal{B}_\cap = (\Sigma, S, I, F, T)$ устроен так:

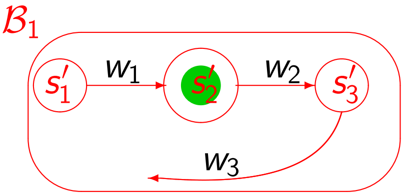
1. $S = (S_1 \times S_2) \cup (S_2 \times S_1)$;
2. $I = I_1 \times I_2$;
3. $F = F_2 \times S_1$;
4. Для любой $x, x \in \Sigma$, и $\langle s', s'' \rangle$ из S

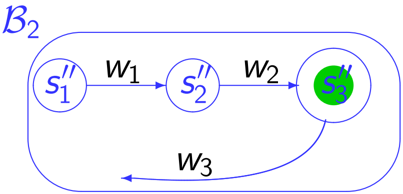
$$T(\langle s', s'' \rangle, x) = \begin{cases} \langle T_1(s', x), T_2(s'', x) \rangle, \text{если } s' \in S_1 \setminus F_1, s'' \in S_2, \\ \langle T_2(s'', x), T_1(s', x) \rangle, \text{если } s' \in F_1, s'' \in S_2, \\ \langle T_2(s', x), T_1(s'', x) \rangle, \text{если } s' \in S_2 \setminus F_2, s'' \in S_1, \\ \langle T_1(s'', x), T_2(s', x) \rangle, \text{если } s' \in F_2, s'' \in S_1. \end{cases}$$

Автоматы Бюхи



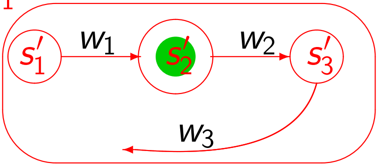
АВТОМАТЫ БЮХИ



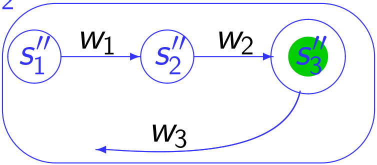


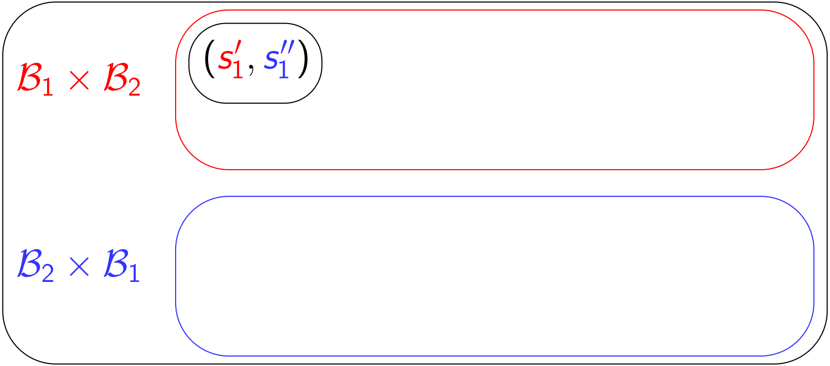
Автоматы Бюхи

$\mathcal{B}_1$

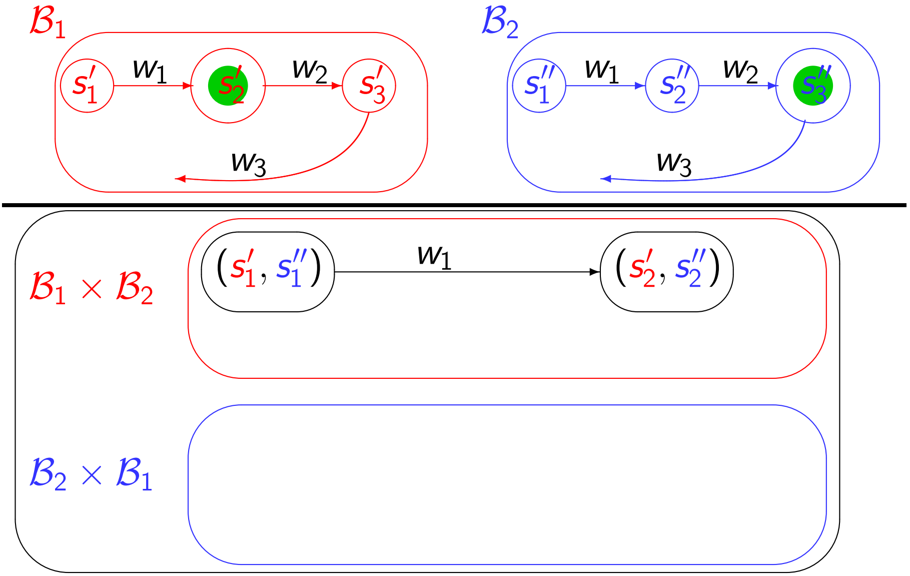


$\mathcal{B}_2$

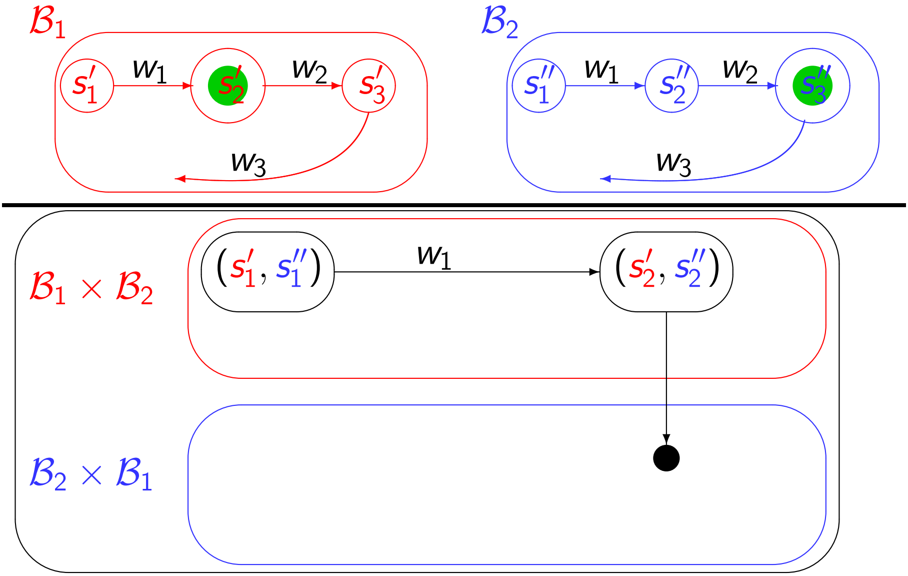




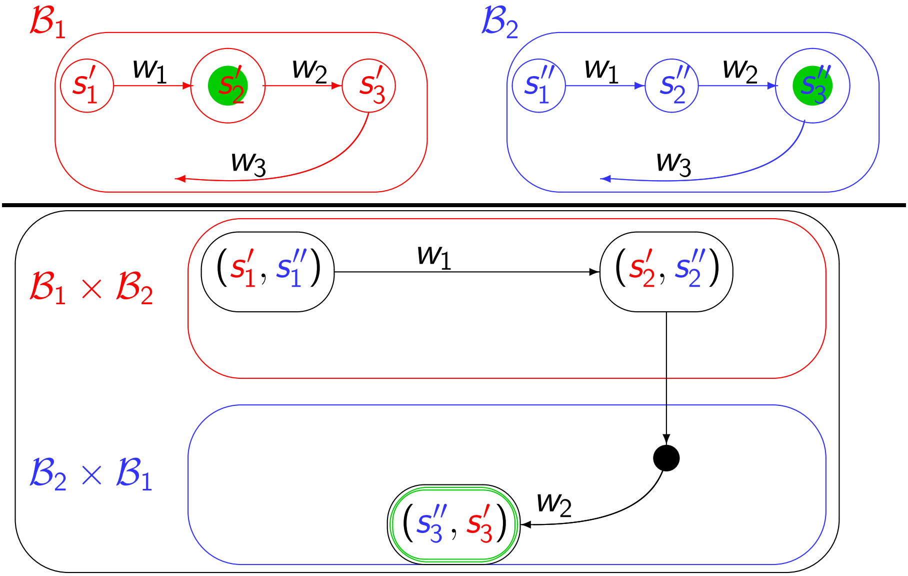
АВТОМАТЫ БЮХИ



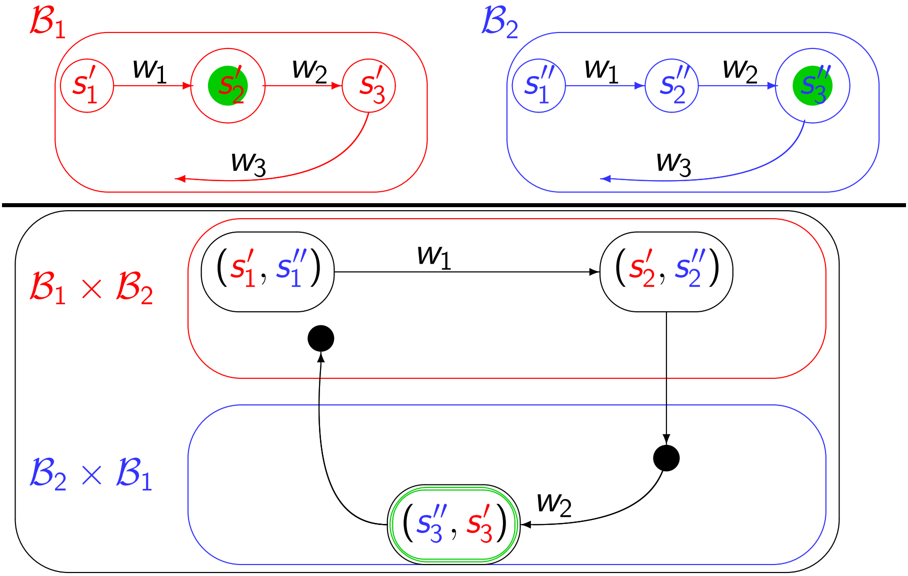
Автоматы Бюхи



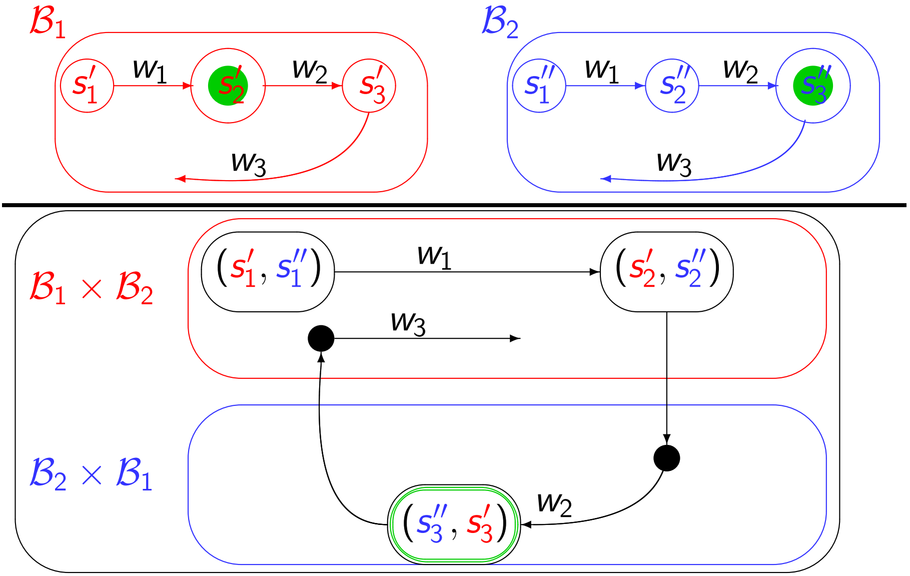
АВТОМАТЫ БЮХИ



Автоматы Бюхи



АВТОМАТЫ БЮХИ



Автоматы Бюхи

Таким образом, $\alpha \in L(\mathcal{B}_1) \cap L(\mathcal{B}_2)$

Автоматы Бюхи

Таким образом, $\alpha \in L(\mathcal{B}_1) \cap L(\mathcal{B}_2)$

$$\iff$$

существуют такие вычисления σ_1 и σ_2 автоматов $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ на ω-слове α , для которых $\mathrm{inf}(\sigma_1) \cap F_1 \neq \varnothing$ и $\mathrm{inf}(\sigma_2) \cap F_2 \neq \varnothing$

АВТОМАТЫ БЮХИ

Таким образом, $\alpha \in L(\mathcal{B}_1) \cap L(\mathcal{B}_2)$

$$\Longleftrightarrow$$

существуют такие вычисления σ_1 и σ_2 автоматов $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ на ω-слове α , для которых $\inf(\sigma_1) \cap F_1 \neq \varnothing$ и $\inf(\sigma_2) \cap F_2 \neq \varnothing$

$$\Longleftrightarrow$$

существует такое вычисление σ автомата $\mathcal{B}_\cap$ на ω-слове α , в котором состояния вида (s'', s') , где $s'' \in F_2$, встречаются бесконечно часто, т.е. $\inf(\sigma) \cap F \neq \varnothing$

АВТОМАТЫ БЮХИ

Таким образом, $\alpha \in L(\mathcal{B}_1) \cap L(\mathcal{B}_2)$

$$\Longleftrightarrow$$

существуют такие вычисления σ_1 и σ_2 автоматов $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ на ω-слове α , для которых $\mathrm{inf}(\sigma_1) \cap F_1 \neq \varnothing$ и $\mathrm{inf}(\sigma_2) \cap F_2 \neq \varnothing$

$$\Longleftrightarrow$$

существует такое вычисление σ автомата $\mathcal{B}_\cap$ на ω-слове α , в котором состояния вида (s'', s') , где $s'' \in F_2$, встречаются бесконечно часто, т.е. $\mathrm{inf}(\sigma) \cap F \neq \varnothing$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha \in L(\mathcal{B}_\cap)$$

QED

Автоматы Бюхи

Утверждение 11.4. Для любого конечного автомата $\mathcal{A}$ и любого автомата Бюхи $\mathcal{B}$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B}'$, что $L(\mathcal{B}') = L(\mathcal{A}) \cdot L(\mathcal{B})$.

Автоматы Бюхи

Утверждение 11.4. Для любого конечного автомата $\mathcal{A}$ и любого автомата Бюхи $\mathcal{B}$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B}'$, что $L(\mathcal{B}') = L(\mathcal{A}) \cdot L(\mathcal{B})$.

Задача 2. Докажите Утверждение 11.4.

Автоматы Бюхи

Утверждение 11.4. Для любого конечного автомата $\mathcal{A}$ и любого автомата Бюхи $\mathcal{B}$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B}'$, что $L(\mathcal{B}') = L(\mathcal{A}) \cdot L(\mathcal{B})$.

Задача 2. Докажите Утверждение 11.4.

А как можно охарактеризовать ω-языки, распознаваемые произвольными автоматами Бюхи?

Например, так же, как и для обычных автоматов, посредством регулярных выражений.

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Пусть $U, U \subseteq \Sigma^*$, — произвольный язык, удовлетворяющий условиям $U \neq \varnothing, \varepsilon \notin U$. Обозначим записью U^ω ω-язык

$$U^\omega = \{\alpha : \alpha = w_1 w_2 w_3 \dots w_i \dots, \text{ где } w_i \in U, i \geq 1\}$$

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Пусть $U, U \subseteq \Sigma^*$, — произвольный язык, удовлетворяющий условиям $U \neq \varnothing, \varepsilon \notin U$. Обозначим записью U^ω ω-язык

$$U^\omega = \{\alpha : \alpha = w_1 w_2 w_3 \dots w_i \dots, \text{ где } w_i \in U, i \geq 1\}$$

Утверждение 11.5. Для любого конечного автомата $\mathcal{A}$ такого, что $L(\mathcal{A}) \neq \varnothing, \varepsilon \notin L(\mathcal{A})$, существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B}$, что $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})^\omega$.

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Пусть $U, U \subseteq \Sigma^*$, — произвольный язык, удовлетворяющий условиям $U \neq \varnothing, \varepsilon \notin U$. Обозначим записью U^ω ω-язык

$$U^\omega = \{\alpha : \alpha = w_1 w_2 w_3 \dots w_i \dots, \text{ где } w_i \in U, i \geq 1\}$$

Утверждение 11.5. Для любого конечного автомата $\mathcal{A}$ такого, что $L(\mathcal{A}) \neq \varnothing, \varepsilon \notin L(\mathcal{A})$, существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B}$, что $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})^\omega$.

Задача 3. Докажите Утверждение 11.5.

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

ω-регулярным выражением называется всякое выражение одного из следующих видов:

- R^ω , где R — произвольное регулярное выражение такое, что $L(R) \neq \varnothing, \varepsilon \notin L(R)$;
- RB , где R — произвольное регулярное выражение, а B — ω-регулярное выражение;
- $B_1 + B_2$, где B_1, B_2 — произвольные ω-регулярные выражения.

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

ω-регулярным выражением называется всякое выражение одного из следующих видов:

- R^ω , где R — произвольное регулярное выражение такое, что $L(R) \neq \varnothing, \varepsilon \notin L(R)$;
- RB , где R — произвольное регулярное выражение, а B — ω-регулярное выражение;
- $B_1 + B_2$, где B_1, B_2 — произвольные ω-регулярные выражения.

ω-язык $L(B)$ регулярного выражения B определяется естественным образом и называется ω-регулярным языком .

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Пример.

$L((0+1)^*0^\omega) = \{\alpha :$ в слове α конечное число $1\}$

$L(((0+1)^*0)^\omega) = \{\alpha :$ в слове α бесконечно много $0\}$

$$L(0(0+1)^*0^\omega + 1(0+1)^*1^\omega) = ???$$

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Теорема 11.6. Класс ω-регулярных языков совпадает с классом ω-языков, распознаваемых автоматами Бюхи.

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Теорема 11.6. Класс ω-регулярных языков совпадает с классом ω-языков, распознаваемых автоматами Бюхи.

Доказательство. Для каждого ω-регулярного выражения R можно построить автомат Бюхи $\mathcal{B}_R$, распознающий ω-язык $L(R)$. Для этого нужно воспользоваться Утверждениями 11.2-11.5 и результатами решения Задач 2 и 3.

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Покажем, как построить регулярное выражение для заданного автомата Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S, I, F, T)$

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Покажем, как построить регулярное выражение для заданного автомата Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S, I, F, T)$

Для каждой пары состояний $s, s' \in S$, рассмотрим конечный автомат $\mathcal{A}_{s,s'} = (\Sigma, Q, \{s\}, \{s'\}, T)$

Построим ω-регулярное выражение

$$R_{\mathcal{B}} = \sum_{s \in I, s' \in F} R(L(\mathcal{A}_{s,s'}))R^{\omega}(L(\mathcal{A}_{s',s'}) \setminus \{\varepsilon\}),$$

где запись $R(L)$ обозначает регулярное выражение для языка L .

Покажем, что $L(R_{\mathcal{B}}) = L(\mathcal{B})$.

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Возьмем произвольное ω-слово α из $L(\mathcal{B})$. По определению $L(\mathcal{B})$ есть успешное вычисление σ автомата Бюхи $\mathcal{B}$ на ω-слове α , в котором некоторое индикаторное состояние $s', s' \in F$, встречается бесконечно часто, т.е. существует такое разбиение $\alpha = w_0 w_1 w_2 \dots w_i \dots$, что

$$\sigma = s \xrightarrow{w_0}_* s' \xrightarrow{w_1}_+ s' \xrightarrow{w_2}_+ \cdots \xrightarrow{w_{i-1}}_+ s' \xrightarrow{w_i}_+ \cdots$$

и при этом $w_i \neq \varepsilon$ для всех $i \geq 1$.

Заметим, что $w_0 \in L(\mathcal{A}_{s,s'})$ и $w_i \in L(\mathcal{A}_{s',s'})$ для всех $i \geq 1$.

Таким образом, $\alpha \in L(\mathcal{A}_{s,s'})(L(\mathcal{A}_{s',s'}) \setminus \{\varepsilon\})^\omega$.

ω-РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Легко показать, для произвольного ω-слова α из $L(R_{\mathcal{B}})$ автомат Бюхи $\mathcal{B}$ имеет успешное вычисление на этом ω-слове.

И это вы можете сделать самостоятельно.

QED

Алгоритмические проблемы для автоматов Бюхи

Теорема 11.7. Проблема пустоты $L(\mathcal{B}) \neq \varnothing$? для автоматов Бюхи разрешима.

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Теорема 11.7. Проблема пустоты $L(\mathcal{B}) \neq \varnothing$? для автоматов Бюхи разрешима.

Доказательство. Для заданного автомата Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S, I, F, T)$ отношение $L(\mathcal{B}) \neq \varnothing$? выполняется тогда и только тогда, когда существует такая пара слов w' и w'' , что

$$s \xrightarrow{w'}_* s' \text{ и } s' \xrightarrow{w''}_* s'$$

для некоторого начального состояния $s, s \in I$, и некоторого индикаторного состояния $s', s' \in F$.

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Если представить отношение переходов T в виде конечного ориентированного графа G_T , то эти два условия можно переформулировать так:

показать, что в ориентированном графе G_T из одной из вершин множества I достижима компонента сильной связности, содержащая одну из вершин множества F .

Эту задачу можно решить при помощи известных процедур проверки достижимости вершин в конечных графах (например, при помощи алгоритма Дейкстры.) QED

Алгоритмические проблемы для автоматов Бюхи

Задача 4. [Трудная] Придумайте алгоритм проверки эквивалентности **детерминированных** автоматов Бюхи.

Алгоритмические проблемы для автоматов Бюхи

Задача 4. [Трудная] Придумайте алгоритм проверки эквивалентности **детерминированных** автоматов Бюхи.

Решение многих других алгоритмических проблем для автоматов Бюхи значительно облегчается, если воспользоваться следующим фактом.

Теорема 11.8. Для любого автомата Бюхи $\mathcal{B}$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B}'$, что $L(\mathcal{B}') = \Sigma^\omega \setminus L(\mathcal{B})$.

Алгоритмические проблемы для автоматов Бюхи

Проблему эквивалентности для автоматов Бюхи можно свести к проблеме пустоты:

$$L(\mathcal{B}_1) \subseteq L(\mathcal{B}_2) \iff L(\mathcal{B}_1) \cap \overline{L(\mathcal{B}_2)} = \varnothing$$

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Проблему эквивалентности для автоматов Бюхи можно свести к проблеме пустоты:

$$L(\mathcal{B}_1) \subseteq L(\mathcal{B}_2) \iff L(\mathcal{B}_1) \cap \overline{L(\mathcal{B}_2)} = \varnothing$$

Впервые замкнутость класса ω-регулярных языков относительно дополнения удалось доказать Джулиусу Ричарду Бюхи в 1962 г при помощи теоремы Рамсея. Однако автоматы-дополнения, построенные с помощью предложенного им метода, очень велики: $|\overline{\mathcal{B}}| = 2^{2^{O(|\mathcal{B}|)}}$. Позднее были предложены более эффективные методы построения автоматов Бюхи $\overline{\mathcal{B}}$.

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Построение автоматов, распознающих дополнения ω-регулярных языков, требуется для верификации реагирующих информационных систем.

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Вам нужно проверить правильность
работы реагирующей системы Π

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Вам нужно проверить правильность работы реагирующей системы Π

Использовать ω-автомат $\mathcal{B}_{\Pi}$ в качестве модели для Π

Технология применения автоматов Бюхи

Нужно построить драйвер обработки запросов-прерываний.

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

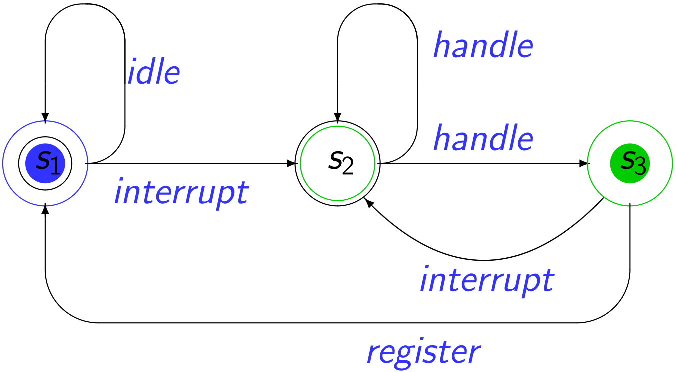
Нужно построить драйвер обработки запросов-прерываний.

Основные действия драйвера

- *idle* — ожидание заявки;
- *interrupt* — прием заявки на обработку прерывания;
- *handle* — обработка прерывание;
- *register* — регистрация обработки прерывания.

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Модель драйвера обработки прерываний $\mathcal{B}_{\Pi}$



ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Вам нужно проверить правильность работы реагирующей системы Π

Использовать ω-автомат $\mathcal{B}_{\Pi}$ в качестве модели для Π

Использовать ω-регулярное выражение $Spec$ для описания правильных вычислений

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Требование правильной обработки прерываний: обработка каждой заявки на прерывание должна завершиться регистрацией, прежде чем начнется обработка следующей заявки.

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Требование правильной обработки прерываний: обработка каждой заявки на прерывание должна завершиться регистрацией, прежде чем начнется обработка следующей заявки.

$$Spec = (idle + interrupt(idle + handle)^{+} register)^{\omega}$$

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Требование правильной обработки прерываний: обработка каждой заявки на прерывание должна завершиться регистрацией, прежде чем начнется обработка следующей заявки.

$$Spec = (idle + interrupt(idle + handle)^{+} register)^{\omega}$$

Проверка правильности: $L(\mathcal{B}_{\Pi}) \subseteq L(Spec)$

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Вам нужно проверить правильность работы реагирующей системы Π

Использовать ω-автомат $\mathcal{B}_\Pi$ в качестве модели для Π

Использовать ω-регулярное выражение $Spec$ для описания правильных вычислений

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Вам нужно проверить правильность работы реагирующей системы Π

Использовать ω-автомат $\mathcal{B}_{\Pi}$ в качестве модели для Π

Использовать ω-регулярное выражение $Spec$ для описания правильных вычислений

Построить ω-автомат $\mathcal{B}_{Spec}$: $L(Spec) = L(\mathcal{B}_{Spec})$

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Вам нужно проверить правильность работы реагирующей системы Π

Использовать ω-автомат $\mathcal{B}_\Pi$ в качестве модели для Π

Использовать ω-регулярное выражение *Spec* для описания правильных вычислений

Построить ω-автомат $\mathcal{B}_{Spec}$: $L(Spec) = L(\mathcal{B}_{Spec})$

Построить дополнение $\overline{\mathcal{B}_{Spec}}$: $L(\overline{\mathcal{B}_{Spec}}) = \Sigma^\omega \setminus L(\mathcal{B}_{Spec})$

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Вам нужно проверить правильность работы реагирующей системы Π

Использовать ω-автомат $\mathcal{B}_\Pi$ в качестве модели для Π

Использовать ω-регулярное выражение $Spec$ для описания правильных вычислений

Построить ω-автомат $\mathcal{B}_{Spec}$:
$L(Spec) = L(\mathcal{B}_{Spec})$

Построить дополнение $\overline{\mathcal{B}_{Spec}}$:
$L(\overline{\mathcal{B}_{Spec}}) = \Sigma^\omega \setminus L(\mathcal{B}_{Spec})$

Проверить пустоту пересечения автоматов:
$L(\overline{\mathcal{B}_{Spec}}) \cap L(\mathcal{B}_\Pi) = \varnothing$?

Обобщения автоматов Бюхи

Достоинство автоматов Бюхи как модели реагирующих вычислений — простота устройства.

Недостаток автоматов Бюхи — невозможность их детерминизации, затрудняющая построение автоматов-дополнений приемлемого размера.

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Достоинство автоматов Бюхи как модели реагирующих вычислений — простота устройства.

Недостаток автоматов Бюхи — невозможность их детерминизации, затрудняющая построение автоматов-дополнений приемлемого размера.

Для преодоления этой трудности были предложены другие варианты автоматов над бесконечными словами. В каждом из этих вариантов ω-автомат имеет вид $\mathcal{B} = (\Sigma, S, I, T, ACC)$, где ACC — условие допущения ω-слов. В частности, для автоматов Бюхи $ACC = F \subseteq S$. Рассмотрим другие виды ω-автоматов.

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Автомат Рабина — это система $\mathcal{R} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{R}})$, в которой $ACC_{\mathcal{R}} = \{(G_1, H_1), (G_2, H_2), \ldots, (G_k, H_k)\}$, где $G_i \subseteq S$, $H_i \subseteq S$ для всех $i, 1 \leq i \leq k$.

Вычисление автомата Рабина $\mathcal{R}$

$$\sigma = s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} s_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_k} s_k \xrightarrow{a_{k+1}} \cdots,$$

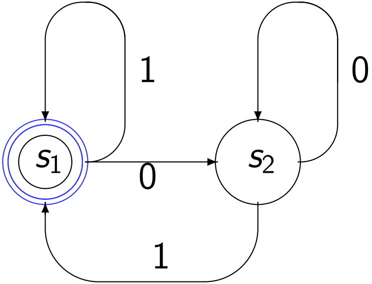
в котором $s_0 \in I$, считается успешным, если существует такое $i, 1 \leq i \leq k$, для которого выполнены условия

$$\mathrm{inf}(\sigma) \cap G_i = \varnothing \text{ и } \mathrm{inf}(\sigma) \cap H_i \neq \varnothing.$$

Обобщения автоматов Бюхи

Детерминированные автоматы Рабина способны распознавать ω-языки, которые непостижимы для детерминированных автоматов Бюхи.

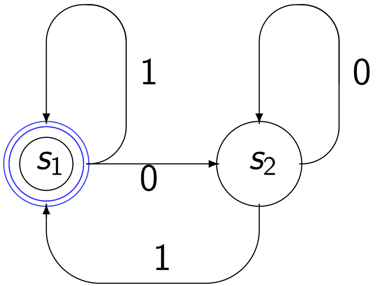
Автомат Рабина $\mathcal{R}_1 : I = \{s_1\}, ACC_{\mathcal{R}} = \{(\{s_1\}, \{s_2\})\}$



ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Детерминированные автоматы Рабина способны распознавать ω-языки, которые непостижимы для детерминированных автоматов Бюхи.

Автомат Рабина $\mathcal{R}_1 : I = \{s_1\}, ACC_{\mathcal{R}} = \{(\{s_1\}, \{s_2\})\}$



$L(\mathcal{R}) = \{\alpha :$ в ω-слове α конечное число 1 $\}$

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Задача 5. Опишите ω-регулярными выражениями те ω-языки, которые распознает рассмотренный ранее автомат Рабина $\mathcal{R}$ со следующим условием допущения $ACC_{\mathcal{R}} = \{\{s_2\}, \{s_1\}\}$.

Обобщения автоматов Бюхи

Задача 5. Опишите ω-регулярными выражениями те ω-языки, которые распознает рассмотренный ранее автомат Рабина $\mathcal{R}$ со следующим условием допущения
$ACC_{\mathcal{R}} = \{\{s_2\}, \{s_1\}\}$.

Очевидно, что для каждого автомата Бюхи существует эквивалентный ему автомат Рабина.

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Автомат Маллера — это система $\mathcal{M} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{M}})$, в которой $ACC_{\mathcal{M}} = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$, где $E_i \subseteq S$ для всех $i, 1 \le i \le k$.

Вычисление автомата Маллера $\mathcal{M}$

$$\sigma = s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} s_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_k} s_k \xrightarrow{a_{k+1}} \dots,$$

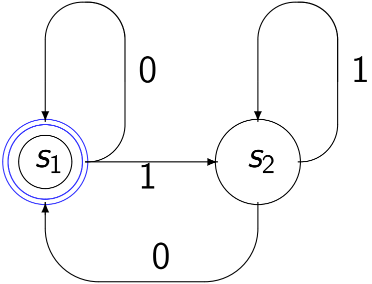
в котором $s_0 \in I$, считается успешным, если существует такое $i, 1 \le i \le k$, для которого выполнено условие

$$\inf(\sigma) = E_i.$$

Обобщения автоматов Бюхи

Детерминированные автоматы Маллера способны распознавать ω-языки, которые непостижимы для детерминированных автоматов Бюхи.

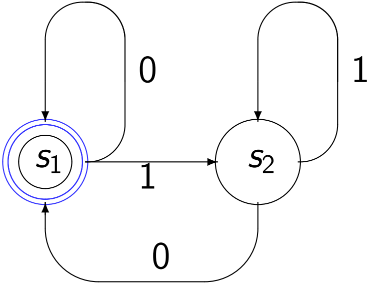
Автомат Маллера $\mathcal{M}_1 : I = \{s_1\}, ACC_{\mathcal{M}} = \{\{s_1\}, \{s_1, s_2\}\}$



ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Детерминированные автоматы Маллера способны распознавать ω-языки, которые непостижимы для детерминированных автоматов Бюхи.

Автомат Маллера $\mathcal{M}_1 : I = \{s_1\}, ACC_{\mathcal{M}} = \{\{s_1\}, \{s_1, s_2\}\}$



$L(\mathcal{M}) = \{\alpha :$ в ω-слове α бесконечно много 0 $\}$

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Задача 6. Опишите ω-регулярными выражениями те ω-языки, которые распознает рассмотренный ранее автомат Маллера $\mathcal{M}$ со следующими условиями допущения

1. $ACC_{\mathcal{M}} = \{\{s_1\}\}$;
2. $ACC_{\mathcal{M}} = \{\{s_2\}\}$;
3. $ACC_{\mathcal{M}} = \{\{s_1, s_2\}\}$;
4. $ACC_{\mathcal{M}} = \{\{s_1, s_2\}.\{s_2\}\}$.

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Задача 6. Опишите ω-регулярными выражениями те ω-языки, которые распознает рассмотренный ранее автомат Маллера $\mathcal{M}$ со следующими условиями допущения

1. $ACC_{\mathcal{M}} = \{\{s_1\}\}$;
2. $ACC_{\mathcal{M}} = \{\{s_2\}\}$;
3. $ACC_{\mathcal{M}} = \{\{s_1, s_2\}\}$;
4. $ACC_{\mathcal{M}} = \{\{s_1, s_2\}.\{s_2\}\}$.

Задача 7. Докажите, что класс языков, распознаваемых автоматами Рабина и автоматами Маллера, замкнут относительно операций объединения и пересечения.

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Класс языков, распознаваемых детерминированными автоматами Маллера, замкнут относительно операции дополнения.

Теорема 11.9. Для любого детерминированного автомата Маллера $\mathcal{M}$ существует такой автомат Маллера $\overline{\mathcal{M}}$, что $L(\overline{\mathcal{M}}) = \Sigma^\omega \setminus L(\mathcal{M})$.

Обобщения автоматов Бюхи

Класс языков, распознаваемых детерминированными автоматами Маллера, замкнут относительно операции дополнения.

Теорема 11.9. Для любого детерминированного автомата Маллера $\mathcal{M}$ существует такой автомат Маллера $\overline{\mathcal{M}}$, что $L(\overline{\mathcal{M}}) = \Sigma^\omega \setminus L(\mathcal{M})$.

Доказательство. Будем считать, что отношение переходов в автомате Маллера $\mathcal{M} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{M}})$ является тотальным. Тогда положим $\overline{\mathcal{M}} = (\Sigma, S, I, T, \overline{ACC_{\mathcal{M}}})$, где

$$\overline{ACC_{\mathcal{M}}} = \{E : E \subseteq S, E \notin ACC_{\mathcal{M}}\}.$$

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Класс языков, распознаваемых детерминированными автоматами Маллера, замкнут относительно операции дополнения.

Теорема 11.9. Для любого детерминированного автомата Маллера $\mathcal{M}$ существует такой автомат Маллера $\overline{\mathcal{M}}$, что $L(\overline{\mathcal{M}}) = \Sigma^\omega \setminus L(\mathcal{M})$.

Доказательство. Будем считать, что отношение переходов в автомате Маллера $\mathcal{M} = (\Sigma, S, I, T, ACC_\mathcal{M})$ является тотальным. Тогда положим $\overline{\mathcal{M}} = (\Sigma, S, I, T, \overline{ACC_\mathcal{M}})$, где

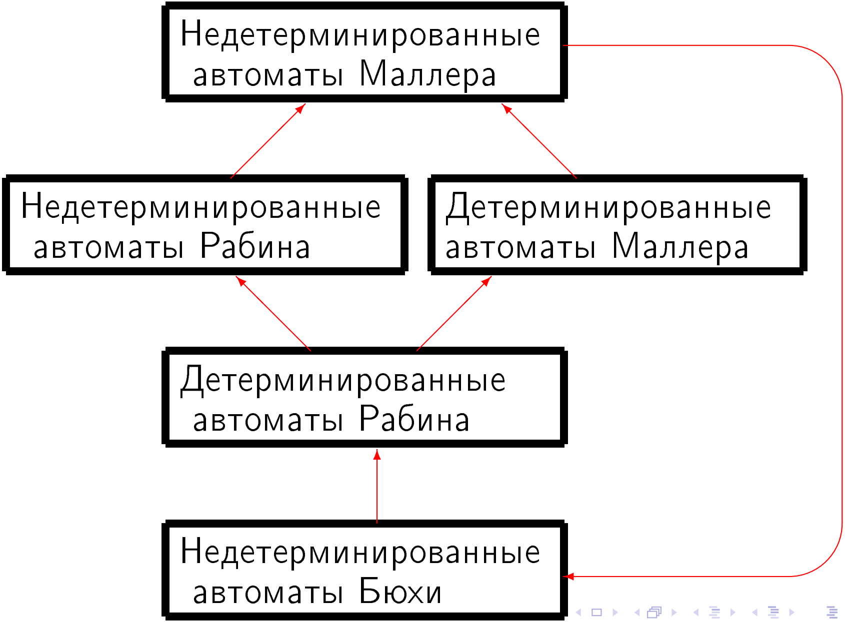
$$\overline{ACC_\mathcal{M}} = \{E : E \subseteq S, E \notin ACC_\mathcal{M}\}.$$

Поскольку оба автомата $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$ детерминированные, на любом ω-слова α каждый из них имеет ровно одно вычисление. И в силу определения условия допустимости $\overline{ACC_\mathcal{M}}$, каждое ω-слово допускается только одним из этих автоматов. QED

Обобщения автоматов Бюхи

Взаимосвязь между всеми разновидностями ω-автоматов можно изобразить на следующей диаграмме, на которой стрелки изображают отношения включения для классов языков, распознаваемых ω-автоматами.

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

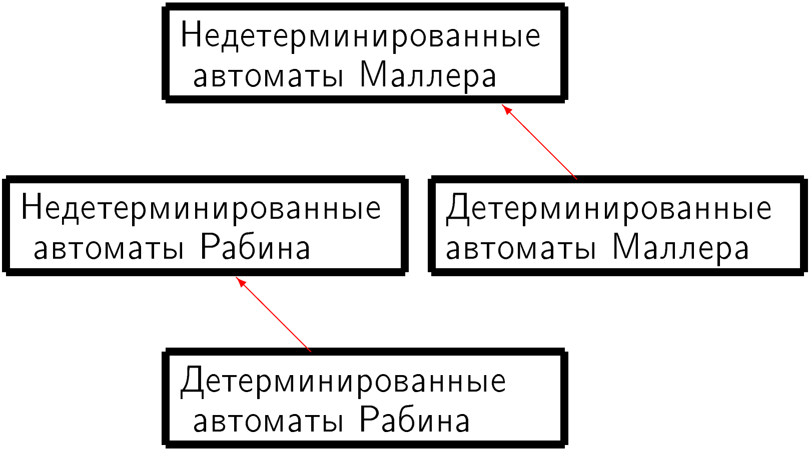


Обобщения автоматов Бюхи

Взаимосвязь между всеми разновидностями ω-автоматов можно изобразить на следующей диаграмме, не которой стрелки изображают отношения включения для классов языков, распознаваемых ω-автоматами.

Некоторые из включений совершенно очевидны.

Обобщения автоматов Бюхи



Обобщения автоматов Бюхи

Теорема 11.10. Для любого автомата Рабина $\mathcal{R} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{R}})$ существует такой автомат Маллера $\mathcal{M} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{M}})$, для которого $L(\mathcal{R}) = L(\mathcal{M})$.

Обобщения автоматов Бюхи

Теорема 11.10. Для любого автомата Рабина $\mathcal{R} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{R}})$ существует такой автомат Маллера $\mathcal{M} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{M}})$, для которого $L(\mathcal{R}) = L(\mathcal{M})$.

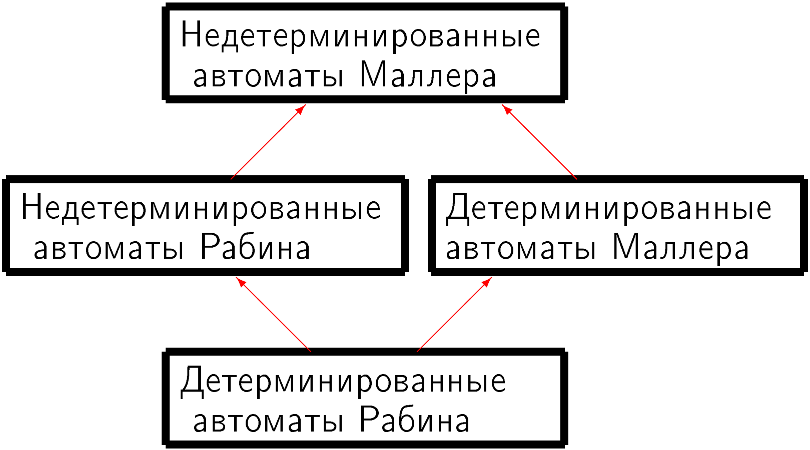
Доказательство.
Если $ACC_{\mathcal{R}} = \{(G_1, H_1), \dots, (G_k, H_k)\}$, то положим

$$ACC_{\mathcal{M}} = \{E : E \subseteq S, \exists i \; (E \cap G_i = \varnothing, E \cap H_i \neq \varnothing)\}$$

QED

Заметим, что свойство детерминированности автоматов при такой трансляции сохраняется.

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ



ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Теорема 11.11. Для любого автомата Маллера $\mathcal{M} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{M}})$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S', I', T', ACC_{\mathcal{B}})$, для которого $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{B})$.

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Теорема 11.11. Для любого автомата Маллера $\mathcal{M} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{M}})$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S', I', T', ACC_{\mathcal{B}})$, для которого $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{B})$.

Доказательство. Идея. Пусть $ACC_{\mathcal{M}} = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$
Автомат Бюхи $\mathcal{B}$ работает так:

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Теорема 11.11. Для любого автомата Маллера $\mathcal{M} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{M}})$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S', I', T', ACC_{\mathcal{B}})$, для которого $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{B})$.

Доказательство. Идея. Пусть $ACC_{\mathcal{M}} = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$
Автомат Бюхи $\mathcal{B}$ работает так:

1. Вначале $\mathcal{B}$ осуществляет переходы, следуя программе автомата Маллера $\mathcal{M}$;

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Теорема 11.11. Для любого автомата Маллера $\mathcal{M} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{M}})$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S', I', T', ACC_{\mathcal{B}})$, для которого $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{B})$.

Доказательство. Идея. Пусть $ACC_{\mathcal{M}} = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$
Автомат Бюхи $\mathcal{B}$ работает так:

1. Вначале $\mathcal{B}$ осуществляет переходы, следуя программе автомата Маллера $\mathcal{M}$;
2. Затем $\mathcal{B}$ недетерминированно выбирает одно из множеств состояний $E_i, 1 \leq i \leq k$, и с этого момента следит за тем, чтобы все последующие переходы по программе автомата $\mathcal{M}$ осуществлялись только через состояния множества E_i ;

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

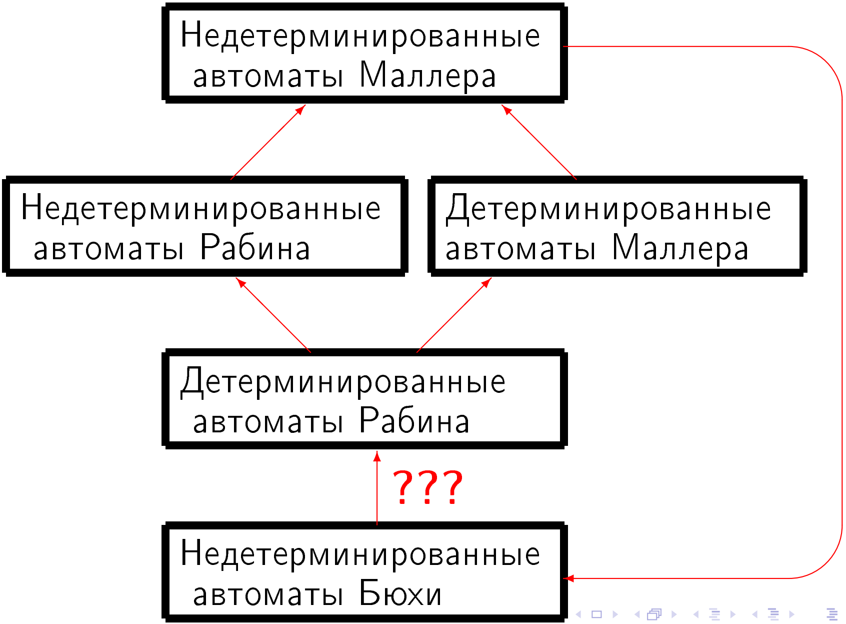
Теорема 11.11. Для любого автомата Маллера $\mathcal{M} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{M}})$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S', I', T', ACC_{\mathcal{B}})$, для которого $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{B})$.

Доказательство. Идея. Пусть $ACC_{\mathcal{M}} = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$
Автомат Бюхи $\mathcal{B}$ работает так:

1. Вначале $\mathcal{B}$ осуществляет переходы, следуя программе автомата Маллера $\mathcal{M}$;
2. Затем $\mathcal{B}$ недетерминированно выбирает одно из множеств состояний $E_i, 1 \leq i \leq k$, и с этого момента следит за тем, чтобы все последующие переходы по программе автомата $\mathcal{M}$ осуществлялись только через состояния множества E_i ;
3. Если очередной переход приводит в состояние, не принадлежащее множеству E_i , то автомат $\mathcal{B}$ прекращает функционирование.

QED

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ



Обобщения автоматов Бюхи

Задача 7. Докажите, что для любого автомата Рабина $\mathcal{R} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{R}})$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S', I', T', ACC_{\mathcal{B}})$, для которого $L(\mathcal{R}) = L(\mathcal{B})$.

Обобщения автоматов Бюхи

Задача 7. Докажите, что для любого автомата Рабина $\mathcal{R} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{R}})$ существует такой автомат Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S', I', T', ACC_{\mathcal{B}})$, для которого $L(\mathcal{R}) = L(\mathcal{B})$.

Но самая интересная теорема этого раздела — это

Теорема 11.12. [Сафра] Для любого автомата Бюхи $\mathcal{B} = (\Sigma, S, I, T, ACC_{\mathcal{B}})$ существует такой **детерминированный** автомат Рабина $\mathcal{R} = (\Sigma, S', I', T', ACC_{\mathcal{R}})$, для которого $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{R})$ и при этом $|S'| = 2^{O(n \log n)}$, где $n = |S|$.

Обобщения автоматов Бюхи

Таким образом, задачу построения автомата Бюхи, распознающего дополнение заданного ω-регулярного языка L , можно решить так.

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Таким образом, задачу построения автомата Бюхи, распознающего дополнение заданного ω-регулярного языка L , можно решить так.

1. Для заданного ω-регулярного языка L построить недетерминированный автомат Бюхи $\mathcal{B}$, распознающий этот язык (Теорема 11.6.).

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Таким образом, задачу построения автомата Бюхи, распознающего дополнение заданного ω-регулярного языка L , можно решить так.

1. Для заданного ω-регулярного языка L построить недетерминированный автомат Бюхи $\mathcal{B}$, распознающий этот язык (Теорема 11.6.).
2. Для недетерминированного автомата Бюхи $\mathcal{B}$ построить эквивалентный детерминированный автомат Рабина $\mathcal{R}$ (Теорема 11.12.).

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Таким образом, задачу построения автомата Бюхи, распознающего дополнение заданного ω-регулярного языка L , можно решить так.

1. Для заданного ω-регулярного языка L построить недетерминированный автомат Бюхи $\mathcal{B}$, распознающий этот язык (Теорема 11.6.).
2. Для недетерминированного автомата Бюхи $\mathcal{B}$ построить эквивалентный детерминированный автомат Рабина $\mathcal{R}$ (Теорема 11.12.).
3. Для детерминированного автомата Рабина $\mathcal{R}$ построить эквивалентный детерминированный автомат Маллера $\mathcal{M}$ (Теорема 11.10.).

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Таким образом, задачу построения автомата Бюхи, распознающего дополнение заданного ω-регулярного языка L , можно решить так.

1. Для заданного ω-регулярного языка L построить недетерминированный автомат Бюхи $\mathcal{B}$, распознающий этот язык (Теорема 11.6.).
2. Для недетерминированного автомата Бюхи $\mathcal{B}$ построить эквивалентный детерминированный автомат Рабина $\mathcal{R}$ (Теорема 11.12.).
3. Для детерминированного автомата Рабина $\mathcal{R}$ построить эквивалентный детерминированный автомат Маллера $\mathcal{M}$ (Теорема 11.10.).
4. Для детерминированного автомата Маллера $\mathcal{M}$ построить его дополнение $\overline{\mathcal{M}}$ (Теорема 11.9.).

Обобщения автоматов Бюхи

Таким образом, задачу построения автомата Бюхи, распознающего дополнение заданного ω-регулярного языка L , можно решить так.

1. Для заданного ω-регулярного языка L построить недетерминированный автомат Бюхи $\mathcal{B}$, распознающий этот язык (Теорема 11.6.).
2. Для недетерминированного автомата Бюхи $\mathcal{B}$ построить эквивалентный детерминированный автомат Рабина $\mathcal{R}$ (Теорема 11.12.).
3. Для детерминированного автомата Рабина $\mathcal{R}$ построить эквивалентный детерминированный автомат Маллера $\mathcal{M}$ (Теорема 11.10.).
4. Для детерминированного автомата Маллера $\mathcal{M}$ построить его дополнение $\overline{\mathcal{M}}$ (Теорема 11.9.).
5. Для детерминированного автомата Маллера $\overline{\mathcal{M}}$ построить эквивалентный автомат Бюхи $\overline{\mathcal{B}}$ (Теорема 11.11.).

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Описанная технологическая цепочка позволяет проводить синтез и формальную верификацию реагирующих программ с использованием логических языков в качестве средства спецификации их поведения.

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Вам нужно проверить правильность работы реагирующей системы Π

Использовать ω-автомат $\mathcal{B}_{\Pi}$ в качестве модели для Π

Использовать ω-регулярное выражение $Spec$ для описания правильных вычислений

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Вам нужно проверить правильность работы реагирующей системы Π

Использовать ω-автомат $\mathcal{B}_\Pi$ в качестве модели для Π

Использовать ω-регулярное выражение $Spec$ для описания правильных вычислений

Построить ω-автомат $\mathcal{B}_{Spec}$: $L(Spec) = L(\mathcal{B}_{Spec})$

Технология применения автоматов Бюхи

Вам нужно проверить правильность работы реагирующей системы Π

Использовать ω-автомат $\mathcal{B}_{\Pi}$ в качестве модели для Π

Использовать ω-регулярное выражение $Spec$ для описания правильных вычислений

Построить ω-автомат $\mathcal{B}_{Spec}$: $L(Spec) = L(\mathcal{B}_{Spec})$

Построить дополнение $\overline{\mathcal{B}_{Spec}}$: $L(\overline{\mathcal{B}_{Spec}}) = \Sigma^{\omega} \setminus L(\mathcal{B}_{Spec})$

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМАТОВ БЮХИ

Вам нужно проверить правильность работы реагирующей системы Π

Использовать ω-автомат $\mathcal{B}_{\Pi}$ в качестве модели для Π

Использовать ω-регулярное выражение $Spec$ для описания правильных вычислений

Построить ω-автомат $\mathcal{B}_{Spec}$:
$L(Spec) = L(\mathcal{B}_{Spec})$

Построить дополнение $\overline{\mathcal{B}_{Spec}}$:
$L(\overline{\mathcal{B}_{Spec}}) = \Sigma^{\omega} \setminus L(\mathcal{B}_{Spec})$

Проверить пустоту пересечения автоматов:
$L(\overline{\mathcal{B}_{Spec}}) \cap L(\mathcal{B}_{\Pi}) = \varnothing$?

Технология применения автоматов Бюхи

А какими средствами, помимо ω-регулярных выражений, можно описывать требуемое поведение ω-автоматов?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 11