

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

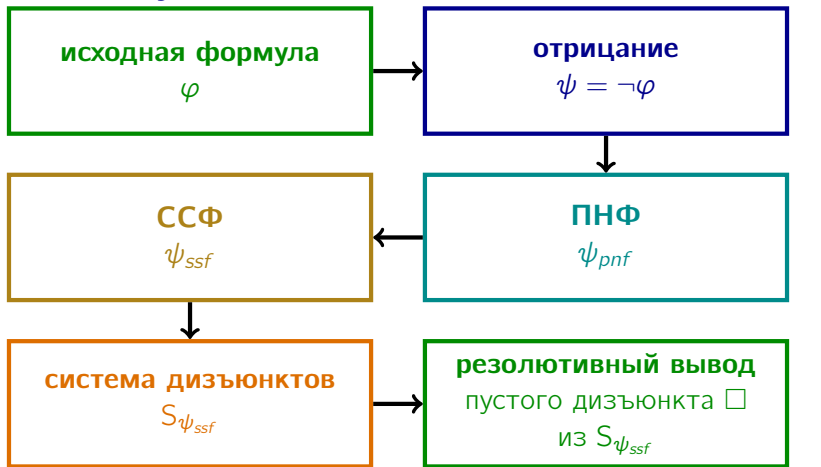
## Блок 24

Эрбрановские интерпретации  
Теорема об эрбрановских интерпретациях

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

## Краткое вступление



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$\Leftarrow$  существует вывод  $\square$  из  $S_{\psi_{ssf}}$

Последняя недостающая деталь метода — « $\Leftrightarrow$ » на месте « $\Leftarrow$ »

## Краткое вступление

Временно забудем про метод резолюций  
и попробуем выделить *общую часть* рассуждений «в лоб»  
о невыполнимости системы дизъюнктов  $S$  в заданной интерпретации  $\mathcal{I}$

Для примера рассмотрим такую систему:  $S = \{P(x), \neg P(f(c))\}$

Для обоснования невыполнимости  $S$  достаточно заметить,  
что в любой модели  $\mathcal{I}$  для  $S$  предмет, описываемый термом  $f(c)$ ,  
и обладает свойством  $P$  ( $\mathcal{I} \models \forall x P(x)$ ), и не обладает ( $\mathcal{I} \models \neg P(f(c))$ )

В этом замечании не используются  
природа предметной области  $\mathcal{I}$  и устройство оценок  $\bar{c}$  и  $\bar{f}$ ,  
и важно лишь то, каким термом задаётся «противоречивый» предмет

Если в интерпретации  $\mathcal{I}$  заменить каждый предмет  
множеством основных термов, описывающих этот предмет,  
и сохранить устройство оценки  $P$ , то в результате получится

**эрбрановская интерпретация**

# Эрбрановские интерпретации

Эрбрановской интерпретацией (или, по-другому, —  $\mathcal{H}$ -интерпретацией) сигнатуры  $\sigma = \langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$  называется интерпретация  $\langle \mathcal{H}_\sigma, \overline{\text{Const}}_\mathcal{H}, \overline{\text{Func}}_\mathcal{H}, \overline{\text{Pred}} \rangle$ , где:

- ▶  $\mathcal{H}_\sigma$  — эрбрановский универсум ( $\mathcal{H}$ -универсум): множество это множество всех основных термов сигнатуры
  - ▶  $\sigma$ , если  $\text{Const} \neq \emptyset$
  - ▶  $\langle \{c_\mathcal{H}\}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$ , если  $\text{Const} = \emptyset$  ( $c_\mathcal{H}$  — эрбрановская константа)
- ▶  $\overline{\text{Const}}_\mathcal{H}(c) = c$  для любой константы  $c$  из  $\text{Const}$
- ▶  $\overline{\text{Func}}_\mathcal{H}(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$   
для любых  $f^{(n)} \in \text{Func}$  и  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$
- ▶  $\overline{\text{Pred}}$  — произвольная оценка предикатных символов

Первые три пункта означают, что  $\mathcal{H}$ -интерпретация — это интерпретация, построенная над свободной алгеброй термов

Все  $\mathcal{H}$ -интерпретации заданной сигнатуры отличаются друг от друга только выбором оценки  $\overline{\text{Pred}}$

# Эрбрановские интерпретации

**Эрбрановский базис** ( $B_{\mathcal{H}}$ ) — это множество всех атомов, построенных над термами  $\mathcal{H}$ -универсума

$\mathcal{H}$ -интерпретация  $\mathcal{I}$  всегда и однозначно определяется тем, какие атомы из  $B_{\mathcal{H}}$  в ней истинны и какие нет, то есть множеством

$$B^{\mathcal{I}} = \{A \mid A \in B_{\mathcal{H}}, \mathcal{I} \models A\}$$

**Например,**

- ▶  $B^{\mathcal{I}} = \emptyset$ : все основные атомы **ложны** в  $\mathcal{I}$
- ▶  $B^{\mathcal{I}} = B_{\mathcal{H}}$ : все основные атомы **истинны** в  $\mathcal{I}$
- ▶  $B^{\mathcal{I}} = B^{\mathcal{J}'} \cap B^{\mathcal{J}''}$ : в  $\mathcal{I}$  истинны те и только те основные атомы, которые истинны в обеих интерпретациях  $\mathcal{J}'$ ,  $\mathcal{J}''$

Для удобного использования теоретико-множественной нотации иногда будем отождествлять  $\mathcal{H}$ -интерпретацию  $\mathcal{I}$  с множеством  $B^{\mathcal{I}}$

# Теорема об эрбрановских интерпретациях

**Система дизъюнктов выполнима тогда и только тогда, когда она имеет эрбрановскую модель**

Доказательство.

Рассмотрим произвольную систему дизъюнктов  $S$  и докажем теорему для этой системы

( $\Leftarrow$ ) Очевидно:

если  $S$  выполняется в некоторой эрбрановской интерпретации, то  $S$  выполняется хотя бы в одной интерпретации

( $\Rightarrow$ )

Пусть система  $S$  выполнима

Тогда для неё существует модель  $\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle$

Построим по интерпретации  $\mathcal{I}$  эрбрановскую модель  $\mathcal{I}_H$  для  $S$  той же сигнатуры  $\sigma$

# Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. ( $\Rightarrow$ )

$$\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$$

Если  $\text{Const} = \emptyset$ , то добавим и произвольно оценим константу  $\mathbf{c}_{\mathcal{H}}$  в  $\mathcal{I}$

Поставим такое соответствие  $\alpha : \mathcal{H}_{\sigma} \rightarrow D$ :

$$\alpha(t) \text{ — значение термина } t \text{ в } \mathcal{I}$$

Зададим оценку  $\overline{\overline{P}}$  каждого предикатного символа  $P$  в  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  так:

$$\overline{\overline{P}}(t_1, \dots, t_k) = \overline{P}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k))$$

То же самое другими словами — зададим интерпретацию  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  так:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{P(t_1, \dots, t_k) \mid P(t_1, \dots, t_k) \in B_{\mathcal{H}}, \overline{\overline{P}}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k)) = \mathbf{t}\}$$

Покажем, что такая интерпретация  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  является моделью для  $S$

Но для начала приведём пример, чтобы стало *понятнее*,  
как соотносятся  $\mathcal{I}$  и  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

# Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. ( $\Rightarrow$ )

$$\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$$

**Пример:** рассмотрим интерпретацию  $\mathcal{I}$  сигнатуры  $\langle \{0\}, \{\mathbf{s}^{(1)}\}, \{<^{(2)}\} \rangle$  с естественным арифметическим устройством:

- ▶ предметная область — множество всех целых чисел
- ▶  $\overline{0}$  — число 0;
- ▶  $\overline{\mathbf{s}}(n) = n + 1$ ;
- ▶  $<$  — отношение строгого неравенства чисел

Тогда:

$$\mathcal{H}_{\sigma} = \{0, \quad \mathbf{s}(0), \quad \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)), \quad \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), \quad \dots\}$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \left\{ \begin{array}{llll} 0 < \mathbf{s}(0), & \mathbf{s}(0) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)), & \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), & \dots \\ 0 < \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)), & \mathbf{s}(0) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), & \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)))), & \dots \\ 0 < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), & \mathbf{s}(0) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)))), & \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))))), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}$$



# Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. ( $\Rightarrow$ )

$$\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$$

Предположим от противного, что  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$

Тогда в  $S$  содержится дизъюнкт  $D$ , такой что  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models D$

Пусть, для ясности,  $D = \forall \tilde{x}^n (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m)$ ,  
где  $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m$  — атомы

Тогда существуют термы  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_{\sigma}$ , такие что

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_1[t_1, \dots, t_n] \quad \dots \quad \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_k[t_1, \dots, t_n]$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_1[t_1, \dots, t_n] \quad \dots \quad \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_m[t_1, \dots, t_n]$$

По заданию интерпретации  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ , верно и

$$\mathcal{I} \not\models A_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] \quad \dots \quad \mathcal{I} \not\models A_k[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)]$$

$$\mathcal{I} \models B_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] \quad \dots \quad \mathcal{I} \models B_m[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)]$$

Следовательно,  $\mathcal{I} \not\models \forall \tilde{x}^n (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m)$ ,

что *противоречит* выбору  $\mathcal{I}$  как **модели** для  $S$

Значит, предположение « $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$ » неверно, то есть  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models S$  ▼