

# Математическая логика и логическое программирование

[mk.cs.msu.ru](http://mk.cs.msu.ru) → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 1

Вступление:

Что такое логика

Несколько логических парадоксов

Чего ожидать в лекциях

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

# Что такое логика

Логика<sup>1</sup> — это наука об общезначимых формах и средствах мысли, необходимых для рационального познания в любой области знания

Логика<sup>2</sup> — это нормативная наука о формах и приёмах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляющейся с помощью языка

Логика<sup>3</sup> — это наука, которая изучает, каким образом мы выражаем мысли, делаем умозаключения, и как всё это можно представить формально

Логика<sup>4</sup> — это наука о правильных способах рассуждения, то есть таких, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты

---

1 Философский энциклопедический словарь.

2 Бочаров, Маркин. Основы логики.

3 Метакидес, Нероуд. Принципы логики и логического программирования.

4 Успенский, Верещагин, Плиско. Вводный курс математической логики.

# Что такое логика

Формальная логика<sup>1</sup> — это наука о законах знания, полученного из ранее установленных и проверенных истин, без обращения в каждом конкретном случае к опыту, а только в результате применения законов и правил мышления

Формальная логика<sup>2</sup> — сейчас это синоним логики

Математическая логика<sup>3</sup> — это

- 1) логика, развивающаяся с помощью математических методов,
- 2) логика, используемая в математике

---

1 Кондаков. Логический словарь-справочник.

2 Философский энциклопедический словарь.

3 Клини. Математическая логика.

# Что такое логика

**Формальная математическая логика** изучает

- ▶ законы причинно-следственной связи в окружающем мире
- ▶ проявление этих законов в рациональном мышлении человека
- ▶ отражение этих законов в **языках**,
  - ▶ как естественных,
  - ▶ так и искусственных
- ▶ **формы**, в которых проявляются эти законы, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся

# Что такое логика

Например:

Из того, что  
**все люди смертны**  
и  
**Сократ — человек**  
следует, что  
**Сократ смертен**

Из того, что  
**у змей нет лап**  
и  
**уж — змея**  
следует, что  
**у ужа нет лап**

Из того, что  
**каждый металл — проводник**  
и  
**ртуть — металл**  
следует, что  
**ртуть — проводник**

Эти высказывания относятся к совершенно разным областям  
и имеют совершенно разный смысл, но в целом одинаковую **форму**

# Что такое логика

Например:

Вот эта **форма**:

Из того, что

**каждый предмет, обладающий свойством А  
обладает и свойством В**

и

**предмет с обладает свойством А**

следует, что

**предмет с обладает свойством В**

Это один из **законов** логики, не зависящий от смысла А, В и с

Подходящим способом **интерпретируя** А, В и с в этом законе,  
можно получить из него упомянутые высказывания и многие другие

При этом сам закон не зависит от выбранной интерпретации

# Что такое логика

Законами логики задаются универсальные способы преобразования **информации** из одной формы в другую

**Например:**

**«У змей нет лап, и уж — змея»**

Упомянутый закон логики позволяет извлечь информацию, «скрытую» в этой фразе (форме), и представить её в другой форме:

**«У ужа нет лап»**

Следует иметь в виду, что при помощи законов логики **нельзя** получить новую информацию, а **можно** только преобразовать форму имеющейся информации

Иллюстрация того, насколько полезным может быть умение изменять форму информации:

**« $x$  — наибольший простой делитель числа 23 082 745 709»**

и

**« $x = 3221$ » —**

это две формы задания одного и того же числа  $x$

# Стойт ли уделять этому столько внимания?

Логика скрыта в основе многих явлений, процессов и задач, связанных с языком, рациональным познанием и умозаключениями

В лекциях — там, где это будет наиболее наглядно — иногда будут приводиться общие рассуждения и конкретные примеры по этому поводу

Но уже сейчас можно задуматься о простых для восприятия проблемах, с которыми непросто справиться без должных знаний из области логики:

**логических парадоксах**

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс лжеца

(думаю, что все знают этот парадокс; а кто не знает — запоминайте)

**Это утверждение ложно**

Ложно ли утверждение выше?

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс Рассела

(а этот парадокс должны знать все математики)

Пусть  $\Omega$  — множество всех множеств,  
не содержащих себя в качестве элемента:

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \notin \omega\}$$

Верно ли соотношение  $\Omega \in \Omega$ ?

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс утренней звезды

Венера видна **ранним утром**,  
и поэтому её называют «**утренней звездой**»

Венера видна **поздним вечером**,  
и поэтому её называют «**вечерней звездой**»

Означает ли это, что **утренняя звезда**  
**видна поздним вечером?**

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс лысого

(он же «парадокс кучи»)

Если у человека нет ни одного волоса, то он лыс

Если у лысого вырастет ещё один волосок, то он останется лысым

Значит, все люди лысые?

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс пьяницы

**Теорема.** Все, кто здесь присутствует, пьют.

Доказательство.

Здесь присутствует человек, такой что если он пьёт, то все пьют. (\*)

Я пью.

Значит, все пьют. ▼

**Лемма.** (\*)

Доказательство.

Если все в этой комнате пьют,  
то этот человек — любой из присутствующих (например, я).

Иначе один из присутствующих ( $x$ ) — непьющий.

Пусть  $A$  — утверждение « $x$  пьёт», и  $B$  — утверждение «все пьют».

Утверждение  $A$  ложно, а значит, утверждение «если  $A$ , то  $B$ » истинно. ▼

Где скрыта ошибка, и почему это ошибка?

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс морской битвы

Флотоводец обратился к прорицателю с вопросом, состоится ли завтра морская битва.

Прорицатель ответил: «Битва завтра состоится».

На следующий день случился шторм, и флот не смог выйти в море. Разгневанный флотоводец потребовал от прорицателя вернуть деньги, поскольку его прогноз оказался ложным.

Прорицатель ответил:

«Твои моряки вчера купили на рынке свежее молоко. Сегодня это молоко уже не свежее, но они не просят вернуть им деньги обратно. Мой прогноз тоже был верным вчера, и ты не вправе жаловаться на то, что он неверен сегодня».

Прав ли прорицатель?

## **Парадоксы неизбежны, но их влияние можно ограничить**

Чтобы это ограничение было возможно и неоспоримо,  
необходимо научиться

- ▶ анализировать форму и смысл высказываний,  
составляющих парадокс, и, более того
- ▶ делать это со всей (математической) строгостью

Для этого (как и для многого другого) и предназначена

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**

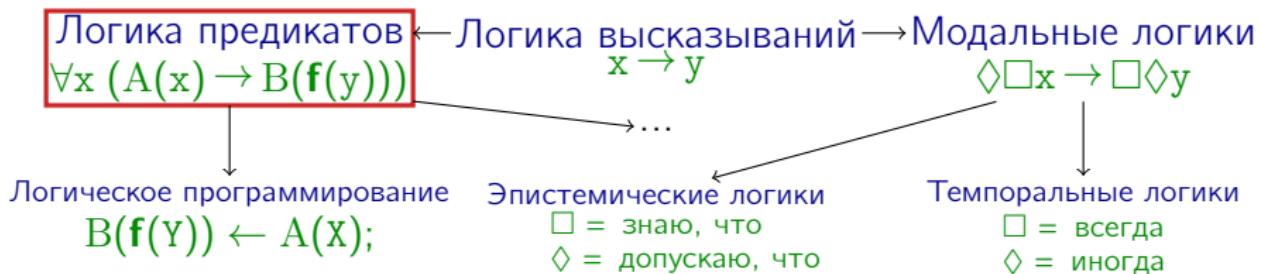
# Чего ожидать в курсе

Использование логики, как правило, начинается с выбора языка записи интересующих высказываний

Таких языков существует великое множество, в зависимости от выбранного класса высказываний и целевых средств их анализа

В математической логике обычно используются искусственные **формальные языки** (языки формул)

В курсе встречаются следующие разделы логики с соответствующими формальными языками:



# Чего ожидать в курсе

Основная задача логики, вокруг которой строится практически весь курс лекций — это задача проверки логического следования:

**Правда ли, что высказывание A**

**обязательно следует из совокупности высказываний  $\Gamma$ ?**

$$\Gamma \models A?$$

Эта задача возникает во многих областях разумной деятельности — например:

- ▶ Экспертные системы:
  - ▶  $\Gamma$  — база знаний, A — запрос,
  - ▶ аппарат применения логических законов — ядро системы
- ▶ Средства автоматизации доказательства теорем:
  - ▶  $\Gamma$  — аксиомы, леммы и т.п., A — формулировка теоремы
  - ▶ аппарат применения логических законов — ядро средства
- ▶ Логическое программирование:
  - ▶  $\Gamma$  — подпрограмма, A — её вызов,
  - ▶ логические законы — это средство интерпретации программ

# Чего ожидать в курсе

Отдельно будет показано, что проверка логического следования — это практически то же самое, что и проверка общезначимости (тождественной истинности):

**Правда ли, что высказывание  $A$  — абсолютная истина?**

$$\models A?$$

В курсе будут обсуждаться два известных логических метода проверки общезначимости формул, каждый из которых по-своему раскрывает некоторые разделы и особенности устройства логики:

- ▶ метод семантических таблиц,  
универсальный и идеологически простой
- ▶ метод резолюций,  
специальный для логики предикатов и эффективный,  
и лежащий в основе интерпретаторов логических программ

## Чего ожидать в курсе

Метод резолюций, применяющийся для ответа на вопрос « $\Gamma \models A?$ », лежит в основе логической парадигмы программирования:

- ▶ Совокупность высказываний  $\Gamma$  образует логическую программу
- ▶ Высказывание  $A$  представляет собой входные данные: запрос к программе
- ▶ Справедливость соотношения  $\Gamma \models A$  отвечает успешности выполнения программы

Чтобы такой язык программирования был полезным, потребуется ограничить язык логических формул и способ применения метода резолюций так, чтобы обеспечить одновременно

- ▶ возможность пошаговой интерпретации формул,
- ▶ алгоритмическую полноту языка и
- ▶ удобство его использования