Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 39

Арифметические интерпретации и теории

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Арифметика

(*раздел математики, предметом которого являются чи́сла*)
занимает особо важное место в математике

В связи с этим уделим чуть больше внимания теориям, предназначенным для анализа арифметических теорем

$Ar[X; \mathrm{Const}; \mathrm{Func}; \mathrm{Pred}]$ — так будем обозначать арифметическую интепретацию сигнатуры $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$ над множеством чисел X:

- Предметная область: X
- $\mathrm{Const} \subseteq X$, и оценкой числа́ является само число
- Func и Pred содержат символы известных арифметических операций и отношений, оценивающиеся общепринятым арифметическим способом
  - Например, $+$, $-$, $\cdot$, $=$, $\neq$, $<$, ...
  - Все отклонения в сторону «неизвестного» будут поясняться отдельно

В части курса, посвящённой аксиоматическим теориям, арифметикой будем называть всякую теорию арифметической интерпретации

В частности, особое внимание будет уделено двум видам арифметик:

- Формальная арифметика — теория интерпретации
$$Ar[\mathbb{N}_0; 0; \mathbf{s}, +, \cdot; =]$$
  - $\mathbf{s}^{(1)}$ — функциональный символ со следующей оценкой: $\overline{\mathbf{s}}(x) = x + 1$

- Арифметика Пресбургера — полная теория интерпретации
$$Ar[\mathbb{N}_0; 0; \mathbf{s}, +; =]$$

Формальная арифметика кажется достаточно узкой:
«всего лишь» целые числа, сложение, умножение да равенство — а как же все остальные операции и отношения?

А арифметика Пресбургера кажется совсем тривиальной:
даже умножения нет

Далее будет показано, эти впечатления обманчивы