

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 10

Метод семантических таблиц:
табличный вывод

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

$\models \varphi \iff$ семантическая таблица $\langle \cdot | \varphi \rangle$ невыполнима

Для доказательства общезначимости формул
(и более широко — невыполнимости таблиц)
будем применять **правила** заранее сформулированного списка

Доказательства такого вида:
преобразование записей согласно заданному своду **правил** —
принято называть **ЛОГИЧЕСКИМ ВЫВОДОМ**

Логический вывод, в котором преобразуются семантические таблицы,
принято называть **табличным выводом**, и соответствующие
правила преобразования — **правилами табличного вывода**

Начнём с определения свода этих правил

Правила табличного вывода

Будем использовать правила табличного вывода двух видов:

$$(*) : \frac{T_0}{T_1}, \quad (**): \frac{T_0}{T_1, T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Согласно правилу, рассматриваемая таблица T_0 преобразуется

(*) в таблицу T_1 для последующего рассмотрения

(**) в таблицы T_1 и T_2 для поочередного рассмотрения

При этом правила будут подобраны так, чтобы

(*) таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и T_1

(**) таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и **хотя бы одна** из таблиц T_1, T_2

Таблицы T_1, T_2 под чертой в правилах иногда называют

альтернативами

Правила табличного вывода

Включим в свод 12 правил табличного вывода:

- ▶ $12 = 2 \cdot 6$
 - ▶ 2 части таблицы: левая, правая
 - ▶ 6 логических операций: $\&$, \vee , \rightarrow , \neg , \forall , \exists
- ▶ согласно каждому правилу, в одной из частей таблицы выбирается одна формула, и эта формула преобразуется в одну или несколько в зависимости от её вида и расположения

В правилах будут использоваться следующие обозначения:

- ▶ Γ , Δ — произвольные множества формул
- ▶ φ , ψ — произвольные формулы
- ▶ x — произвольная предметная переменная
- ▶ t — произвольный терм, такой что подстановка $\{x/t\}$ правильна для φ
- ▶ c — произвольная константа, не содержащаяся в формулах из $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\}$

Правила табличного вывода

$$L\&: \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$LV: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$RV: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\rightarrow: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg: \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\neg: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

$$L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi, \varphi\{x/t\} \mid \Delta \rangle}$$

$$RV: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \forall x \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi\{x/c\} \rangle}$$

$$L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{x/c\} \mid \Delta \rangle}$$

$$R\exists: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi, \varphi\{x/t\} \rangle}$$

Правила табличного вывода

Пара слов об ограничениях

на терм t и константу c в правилах $L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$

Если разрешить подставлять любые термы в $L\forall, R\exists$:

$$\frac{\langle \forall x \exists y P(x, y) \mid \exists y P(y, y) \rangle}{\langle \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(y, y) \mid \exists y P(y, y) \rangle} \begin{array}{l} \text{— выполнимая таблица} \\ \text{— невыполнимая таблица} \end{array}$$

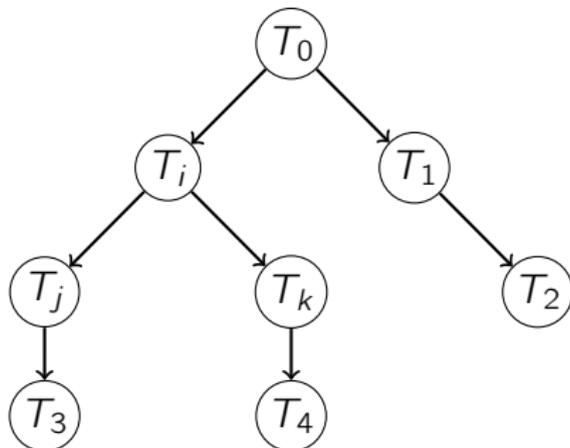
Если разрешить подставлять «использованные» константы в $L\exists, R\forall$:

$$\frac{\langle \exists x P(x) \mid P(c) \rangle}{\langle P(c) \mid P(c) \rangle} \begin{array}{l} \text{— выполнимая таблица} \\ \text{— невыполнимая таблица} \end{array}$$

Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

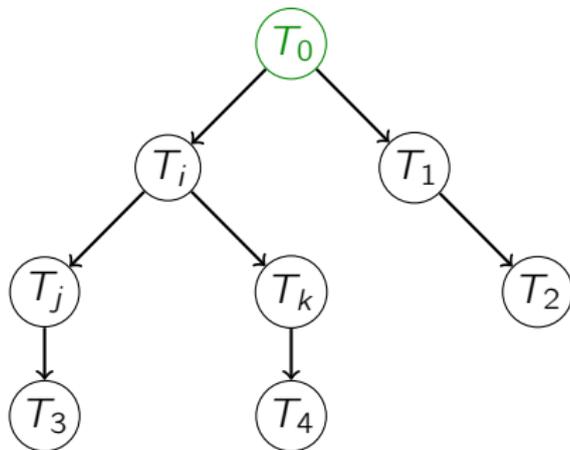
1. Всем вершинам приписаны семантические таблицы



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

2. Корню приписана таблица T_0

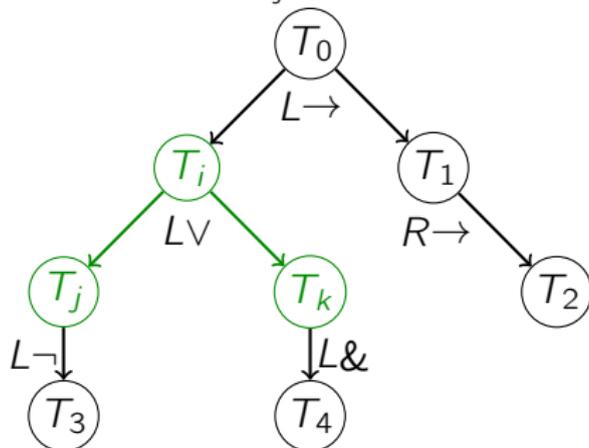


Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

3. Из каждой вершины (T_i) исходит не более двух дуг, и если исходит

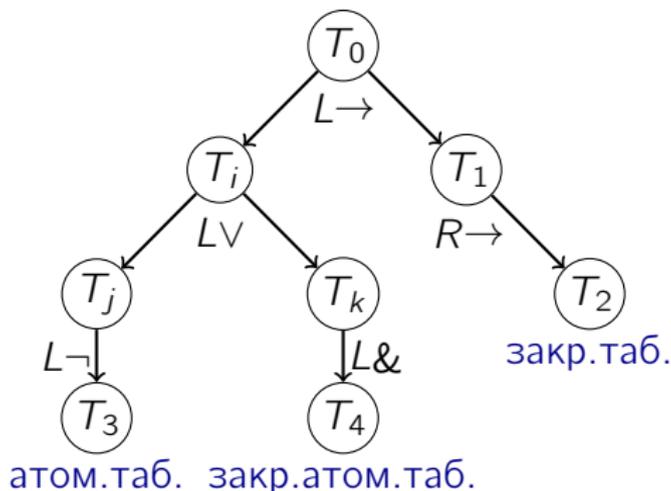
- ▶ ровно одна дуга (в (T_j)), то $\frac{T_i}{T_j}$ — правило табличного вывода
- ▶ две дуги (в $(T_j), (T_k)$), то $\frac{T_i}{T_j, T_k}$ — правило табличного вывода



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

- все таблицы, приписанные листьям, закрыты или атомарны (в том числе могут быть одновременно закрытыми и атомарными)



Табличный вывод

Табличный вывод **успешен**, если он конечен и всем его листьям приписаны закрытые таблицы

Успешный табличный вывод явно демонстрирует, что таблица, для которой он построен, невыполнима (*докажем это позже*)

В частности, согласно **теореме о табличной проверке общезначимости**, если этот вывод построен для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$, то верно $\models \varphi$

Перед строгой формулировкой и обоснованием свойств успешных выводов приведём несколько примеров

Примеры табличных выводов



Вывод **успешен**

При этом для любых формул φ, ψ верно $\models (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$

Примеры табличных выводов

$$\langle \mid \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)) \rangle$$

$\downarrow R \rightarrow$

$$\langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \rangle$$

$\downarrow R \rightarrow$

$$\langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x A(x) \mid \forall x B(x) \rangle$$

$\downarrow R \forall$

$$\langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x A(x) \mid B(c) \rangle$$

$\downarrow L \forall$

$$\langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x A(x), A(c) \mid B(c) \rangle$$

$\downarrow L \forall$

$$\langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x A(x), A(c) \rightarrow B(c), A(c) \mid B(c) \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ \langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), & & \langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \\ \forall x A(x), B(c), A(c) \mid B(c) \rangle & L \rightarrow & \forall x A(x), A(c) \mid B(c), A(c) \rangle \end{array}$$

Закрытая таблица

Закрытая таблица

Вывод **успешен**

При этом $\models \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$

Примеры табличных выводов

$$\begin{aligned} & \langle \mid \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x) \rangle \\ & \quad \downarrow R \rightarrow \\ & \langle \exists x P(x) \mid \forall x P(x) \rangle \\ & \quad \downarrow L \exists \\ & \langle P(c_1) \mid \forall x P(x) \rangle \\ & \quad \downarrow R \forall \\ & \langle P(c_1) \mid P(c_2) \rangle \end{aligned}$$

Незакрытая атомарная таблица

Вывод неуспешен

При этом $\not\models \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

Примеры табличных выводов

$$\begin{array}{c} \langle \mid \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y) \rangle \\ \downarrow R \rightarrow \\ \langle \forall x \exists y P(x, y) \mid \exists y \forall x P(x, y) \rangle \\ \downarrow L \forall \\ \langle \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(\mathbf{c}_1, y) \mid \exists y \forall x P(x, y) \rangle \\ \downarrow R \exists \\ \langle \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(\mathbf{c}_1, y) \mid \exists y \forall x P(x, y), \forall x P(x, \mathbf{c}_2) \rangle \\ \downarrow L \exists \\ \langle \forall x \exists y P(x, y), P(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3) \mid \exists y \forall x P(x, y), \forall x P(x, \mathbf{c}_2) \rangle \\ \downarrow R \forall \\ \langle \forall x \exists y P(x, y), P(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3) \mid \exists y \forall x P(x, y), P(\mathbf{c}_4, \mathbf{c}_2) \rangle \\ \downarrow L \forall \\ \infty \end{array}$$

Вывод **бесконечен** (и, следовательно, неуспешен)

При этом $\not\models \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$

Примеры табличных выводов

$$\begin{array}{c} \langle \mid \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y) \rangle \\ \downarrow R \rightarrow \\ \langle \exists x \forall y P(x, y) \mid \forall y \exists x P(x, y) \rangle \\ \downarrow L \exists \\ \langle \forall y P(c_1, y) \mid \forall y \exists x P(x, y) \rangle \\ \downarrow R \forall \\ \langle \forall y P(c_1, y) \mid \exists x P(x, c_2) \rangle \\ \downarrow L \forall \\ \langle \forall y P(c_1, y), P(c_1, c_3) \mid \exists x P(x, c_2) \rangle \\ \downarrow R \exists \\ \langle \forall y P(c_1, y), P(c_1, c_3) \mid \exists x P(x, c_2), P(c_4, c_2) \rangle \\ \downarrow L \forall \\ \infty \end{array}$$

Вывод **бесконечен** (и, следовательно, неуспешен)

При этом $\models \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$