# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 10

Подстановки
(основные определения)

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

# Вступление

**Правила табличного вывода для логики высказываний:**

$$L\&: \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \,\&\, \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\vee: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\to: \frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\to: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \to \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg: \quad \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\neg: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

Все эти правила можно напрямую перенести в логику предикатов, сохранив их написание и смысл

# Вступление

А как устроить правила преобразования формул, начинающихся с $\forall$ и $\exists$?

**Пример:** $\models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c})$ ?

$$\langle \mid \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c}) \rangle$$

$\downarrow$ ← избавляемся от импликации ($R{\to}$)

$$\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c}) \rangle$$

$\downarrow ?$ ← **подставляем** константу **c** на место $\mathrm{x}$

$$\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{c}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c}) \rangle$$

Следует строго определить термин «**подставляем**»

# Подстановки

Пусть заданы множество переменных Var и множество термов Term

Подстановка — это отображение $\theta : \mathrm{Var} \to \mathrm{Term}$

Область подстановки $\theta$: $\mathrm{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathrm{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$ — это конечная подстановка $\theta$, для которой верно:

- $\mathrm{Dom}_\theta = \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- $\theta(\mathtt{x}_\mathtt{i}) = t_i, \qquad 1 \leq i \leq n$

Пара $\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i$ называется связкой

$\varepsilon$ — это тождественная (пустая) подстановка: $\mathrm{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

# Подстановки

Пусть $E$ — логическое выражение (терм или формула) логики предикатов
и $\theta$ — подстановка

Результат $E\theta$ применения подстановки $\theta$ к $E$ определяется так:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{x}\theta = \theta(\mathrm{x}) & (\mathrm{x} \in \mathsf{Var}) \\
\mathbf{c}\theta = \mathbf{c} & (\mathbf{c} \in \mathsf{Const}) \\
\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathbf{f}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) & (\mathbf{f} \in \mathsf{Func},\ t_1, \ldots, t_n \in \mathsf{Term}) \\
\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathrm{P}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) & (\mathrm{P} \in \mathsf{Pred}) \\
(\varphi \,\&\, \psi)\theta = (\varphi\theta \,\&\, \psi\theta) & (\varphi, \psi \in \mathsf{Form}) \\
(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta) & \\
(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta) & \\
(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta) & \\
(\forall \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\forall \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & (\theta'(\mathrm{x}) = \mathrm{x}; \\
(\exists \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\exists \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & \qquad \theta'(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y}),\ \text{если}\ \mathrm{y} \neq \mathrm{x})
\end{array}
$$

# Подстановки

## Пример применения подстановки к формуле

$\varphi = \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$
$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}), \mathrm{y}/\mathrm{x}, \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{z})\}$

Выделяются все **свободные вхождения** переменных в $\varphi$

$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

Все выделенные вхождения заменяются согласно $\theta$

$\varphi\theta = \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{x})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}))) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

# Подстановки

**При применении подстановок для выделения частных логических следствий следует соблюдать осторожность**

**Например:**

$\varphi(\mathrm{x}) = \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

«если у каждого есть дед, то у $\mathrm{x}$ тоже есть дед»

Очевидно, что $\models \varphi(\mathrm{x})$

$\varphi(\mathrm{x})\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\} = \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y})$

«если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед»

Очевидно, что $\not\models \varphi(\mathrm{x})\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

# Подстановки

Переменная $\mathtt{x}$ свободна для терма $t$ в формуле $\varphi$, если
ни одно свободное вхождение переменной $\mathtt{x}$ не лежит
в областях действия кванторов, связывающих переменные из $\mathrm{Var}_t$

Подстановка $\theta = \{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$ — правильная для формулы $\varphi$,
если для каждой связки $\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i$
переменная $\mathtt{x}_\mathtt{i}$ свободна для терма $t_i$ в формуле $\varphi$

**Например,** для формулы $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{u}, \mathrm{v})\}$ — правильная:
  все вхождения $\mathtt{u}$ и $\mathtt{v}$ в подставляемый терм свободны
- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ — неправильная:
  вхождение $\mathrm{y}$ в подставляемый терм оказывается связанным