Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 10

Подстановки
(основные определения)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Вступление

Правила табличного вывода для логики высказываний:

$$L\&: \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \,\&\, \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\vee: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\to: \frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\to: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \to \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg: \quad \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\neg: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

Все эти правила можно напрямую перенести в логику предикатов, сохранив их написание и смысл

Вступление

А как устроить правила преобразования формул, начинающихся с $\forall$ и $\exists$?

Пример: $\models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathrm{c})$?

$$\langle \mid \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathrm{c}) \rangle$$

$\downarrow$ ← избавляемся от импликации ($R\to$)

$$\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathrm{c}) \rangle$$

$\downarrow ?$ ← **подставляем** константу c на место x

$$\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathrm{c}) \mid \mathrm{P}(\mathrm{c}) \rangle$$

Следует строго определить термин «**подставляем**»

Подстановки

Пусть заданы множество переменных Var и множество термов Term

Подстановка — это отображение $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}$

Область подстановки θ: $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathsf{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$ — это конечная подстановка θ, для которой верно:

- $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- $\theta(\mathtt{x}_\mathtt{i}) = t_i, \qquad 1 \leq i \leq n$

Пара $\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i$ называется связкой

ε — это тождественная (пустая) подстановка: $\mathsf{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение (терм или формула) логики предикатов и θ — подстановка

Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{x}\theta = \theta(\mathrm{x}) & (\mathrm{x} \in \mathsf{Var}) \\
\mathsf{c}\theta = \mathsf{c} & (\mathsf{c} \in \mathsf{Const}) \\
\mathsf{f}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathsf{f}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) & (\mathsf{f} \in \mathsf{Func},\ t_1, \ldots, t_n \in \mathsf{Term}) \\
\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathrm{P}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) & (\mathrm{P} \in \mathsf{Pred}) \\
(\varphi \,\&\, \psi)\theta = (\varphi\theta \,\&\, \psi\theta) & (\varphi, \psi \in \mathsf{Form}) \\
(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta) & \\
(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta) & \\
(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta) & \\
(\forall \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\forall \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & (\theta'(\mathrm{x}) = \mathrm{x}; \\
(\exists \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\exists \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & \qquad \theta'(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y}),\ \text{если}\ \mathrm{y} \neq \mathrm{x})
\end{array}
$$

Подстановки

Пример применения подстановки к формуле

$\varphi = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathtt{y})) \to \mathrm{R}(\mathsf{f}(\mathtt{x})) \vee \exists y\ \mathrm{P}(\mathtt{y}) \vee \mathrm{R}(\mathtt{u})$
$\theta = \{\mathtt{x}/\mathsf{g}(\mathtt{x}, \mathsf{c}), \mathtt{y}/\mathtt{x}, \mathtt{z}/\mathsf{f}(\mathtt{z})\}$

Выделяются все **свободные вхождения** переменных в φ

$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathtt{y})) \to \mathrm{R}(\mathsf{f}(\mathtt{x})) \vee \exists \mathtt{y}\ \mathrm{P}(\mathtt{y}) \vee \mathrm{R}(\mathtt{u})$

Все выделенные вхождения заменяются согласно θ

$\varphi\theta = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathtt{x})) \to \mathrm{R}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathtt{x}, \mathsf{c}))) \vee \exists \mathtt{y}\ \mathrm{P}(\mathtt{y}) \vee \mathrm{R}(\mathtt{u})$

Подстановки

При применении подстановок для выделения частных логических следствий следует соблюдать осторожность

Например:

$\varphi(\mathrm{x}) = \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

«если у каждого есть дед, то у x тоже есть дед»

Очевидно, что $\models \varphi(\mathrm{x})$

$\varphi(\mathrm{x})\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\} = \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y})$

«если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед»

Очевидно, что $\not\models \varphi(\mathrm{x})\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная $\mathtt{x}$ свободна для терма t в формуле φ, если
ни одно свободное вхождение переменной $\mathtt{x}$ не лежит
в областях действия кванторов, связывающих переменные из Var_t

Подстановка $\theta = \{\mathtt{x_1}/t_1, \ldots, \mathtt{x_n}/t_n\}$ — правильная для формулы φ,
если для каждой связки $\mathtt{x_i}/t_i$
переменная $\mathtt{x_i}$ свободна для терма t_i в формуле φ

Например, для формулы $\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{f}(\mathrm{u}, \mathrm{v})\}$ — правильная:
  все вхождения u и v в подставляемый терм свободны
- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ — неправильная:
  вхождение y в подставляемый терм оказывается связанным