

Курс «Основы кибернетики» для бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Системное программирование и компьютерные науки»

1. Общая информация (учебная нагрузка, формы контроля и др.)

Курс является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 – «Прикладная математика и информатика». При этом объём и, в некоторой степени, программа курса варьируются в зависимости от профиля. Для бакалавров 3 курса профиля «Системное программирование и компьютерные науки» (320-328 группы) курс «Основы кибернетики» читается в 6 семестре в объёме 48 часов лекций, сопровождаемых 16 часами семинарских занятий. Курс завершается экзаменом, на который выносятся как теоретические вопросы, изложенные на лекциях, так и задачи, рассмотренные на семинарских занятиях.

В разделах 2-7 данного описания приводится подробная информация о содержании курса, программах и планах его изучения в 2021-2022 уч. году, методических материалах, а в разделах 8 и 9 – об особенностях организации учебного процесса, формах и сроках проведения контрольных мероприятий.

Чтение курса обеспечивается кафедрой математической кибернетики; лектор 2021-2022 уч. года – доцент Романов Д.С. (romanov@cs.msu.ru).

2. Аннотация

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С.В. Яблонский, читается на факультете ВМК с первых лет его существования. Он является продолжением курса «Дискретная математика» и посвящён изложению основных моделей, методов и результатов математической кибернетики, связанных с теорией дискретных управляющих систем (УС), с задачей схемной или структурной реализации дискретных функций и алгоритмов. Методическая, и, частично, содержательная концепции данного варианта курса разработаны профессором С.А. Ложкиным, который читал его для студентов программистских кафедр около 35 лет.

В курсе «Основы кибернетики» рассматриваются различные классы УС (классы схем), представляющие собой дискретные математические модели различных типов электронных схем, систем обработки информации и управления, алгоритмов и программ. Для базовых классов УС (схем из функциональных элементов, формул, контактных схем, автоматных схем), а также некоторых других типов УС, ставятся и изучаются основные задачи теории УС: задача минимизации дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), задача эквивалентных преобразований и структурного моделирования УС, задача синтеза УС, задача повышения надёжности и контроля УС из ненадёжных элементов и др. Рассматриваются также некоторые вопросы сложности алгоритмов. В программу курса входят классические результаты К. Шеннона, С.В. Яблонского, Ю.И. Журавлева и О.Б. Лупанова, а также некоторые результаты последних лет, полученные С.А. Ложкиным. Показывается возможность практического применения этих результатов на примере задачи проектирования СБИС, которые составляют основу программно-аппаратной реализации алгоритмов.

3. Программа

I. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм и связанные с ней задачи

Единичный куб и функции алгебры логики (ФАЛ), представление ФАЛ с помощью ДНФ. Сокращённая ДНФ и тупиковые ДНФ, их «геометрический» смысл. Способы построения однозначно получаемых ДНФ (сокращённой, пересечения тупиковых, Квайна, суммы тупиковых). Особенности ДНФ для ФАЛ из некоторых классов. Функция покрытия и алгоритм построения всех тупиковых ДНФ, оценка длины градиентного покрытия. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ, оценки максимальных и типичных значений некоторых параметров ДНФ.

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

Различные классы УС (классы схем) как структурные математические модели различных типов электронных схем, систем обработки информации и управления, алгоритмов и программ. Основные классы УС – формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ), контактные схемы (КС), – их структура, меры сложности, функционирование, эквивалентность, полнота. Оценка числа схем различных типов.

Понятие подсхемы и принцип эквивалентной замены. Тождества и связанные с ними эквивалентные преобразования УС. Построение полных систем тождеств для формул и СФЭ, представление об эквивалентных преобразованиях КС.

III. Синтез и сложность управляющих систем

Задача синтеза УС, сложность ФАЛ и функция Шеннона. Простейшие методы синтеза схем, реализация некоторых ФАЛ и оценка их сложности. Операция суперпозиции схем и её корректность, лемма Шеннона. Метод каскадов для КС и СФЭ, метод Шеннона. Мощностные методы получения нижних оценок для функций Шеннона. Асимптотически наилучшие методы синтеза формул, СФЭ и КС. Синтез схем для ФАЛ из специальных классов и индивидуальных ФАЛ.

IV. Надёжность и контроль управляющих систем

Самокорректирующиеся КС и простейшие методы их синтеза. Асимптотически наилучшие методы синтеза КС, корректирующих один обрыв или одно замыкание.

Задача контроля УС, тесты для таблиц. Алгоритм построения всех тупиковых тестов, оценки максимального и типичного значений длины диагностического теста.

V. Некоторые вопросы сложности алгоритмов и классы схем, связанные с их программно-аппаратной реализацией

Доказательство теоремы Кука–Левина, примеры NP-полных проблем, связанных с графами.

Некоторые модификации основных классов схем, связанные с программной реализацией ФАЛ. Автоматные функции, их реализация схемами из функциональных элементов и элементов задержки, схемы с «мгновенными» обратными связями. Схемы на КМОП-транзисторах, задача логического и «физического» синтеза СБИС, основные этапы её решения.

4. Список вопросов к экзамену по курсу «Основы кибернетики» (весенний семестр 2018-2019 уч. года; 320-328 группы).

I. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм и связанные с ней задачи

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ. См. [1:гл.1, §§2,5].
2. Сокращённая ДНФ и способы её построения [1:гл.1, §3].
3. Тупиковая ДНФ, ядро и ДНФ пересечения тупиковых. ДНФ Квайна, критерий вхождения простых импликант в тупиковые ДНФ и его локальность. См. [1:гл.1, §4].
4. Особенности ДНФ линейных и монотонных ФАЛ. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ. См. [1:гл.1, §§5,6].
5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о «протыкающих» наборах. Использование градиентного алгоритма для построения ДНФ. См. [1:гл.1, §6].
6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функции Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ [1:гл.1, §7].
7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров [1:гл.1, §§1,3,7]. Теорема Ю.И. Журавлёва о ДНФ сумма минимальных [1:гл.1, §5].

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

8. Формулы алгебры логики, их эквивалентные преобразования с помощью тождеств. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. См. [1:гл.3, §2].
9. Задание формул с помощью деревьев, функционалы их сложности и соотношения между ними. Оптимизация подобных формул по глубине. См. [1:гл.2, §2].
10. Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Изоморфизм и эквивалентность схем, функционалы их сложности, операции приведения. Верхние оценки числа формул и СФЭ в базисе B_0 . См. [1:гл.2, §3].
11. Контактные схемы (КС) и π -схемы, их изоморфизм, эквивалентность, сложность, операции приведения. Структурное моделирование некоторых формул и π -схем. Оценки числа КС и числа π -схем. Особенности функционирования многополюсных КС. См. [1:гл.2, §§5,6].
12. Эквивалентные преобразования СФЭ и моделирование с их помощью формульных преобразований. Моделирование эквивалентных преобразований формул и схем в различных базисах, теорема перехода. См. [1:гл.3, §§1,3].
13. Эквивалентные преобразования КС. Основные тождества, вывод вспомогательных (дополнительных) и обобщенных тождеств. См. [1:гл.3, §4].
14. Полнота системы основных тождеств. Отсутствие конечной полной системы тождеств в классе всех КС. См. [1:гл.3, §5].

III. Синтез и сложность управляющих систем

15. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций. См. [1:гл.4, §1].
16. Простые нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем. См. [1:гл.4, §2], [6:§7].
17. Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные КС и лемма Шеннона. См. [1:гл.2, §§6,7].
18. Каскадные КС и СФЭ. Метод каскадов и примеры его применения, метод Шеннона. См. [1:гл.4, §3].
19. Нижние мощностные оценки функций Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для ФАЛ из специальных классов [1:гл.4, §4].

20. Дизъюнктивно-универсальные множества ФАЛ. Асимптотически наилучший метод О.Б. Лупанова для синтеза СФЭ в базисе B_0 . См. [1:гл.4,§5].
21. Регулярные разбиения единичного куба и моделирование ФАЛ переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе B_0 . См. [1:гл.4,§6].
22. Асимптотически наилучший метод синтеза КС. См. [1:гл.4, §7,5].

IV. Надёжность и контроль управляющих систем

23. Задача контроля схем и тесты для таблиц. Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста. См. [1:гл.1,§8].
24. Самокорректирующиеся КС и методы их построения. Асимптотически наилучший метод синтеза КС, корректирующих 1 обрыв (1 замыкание). См. [4:§7], [2: ч. III, р. 2, §1].

V. Некоторые вопросы сложности алгоритмов и классы схем, связанные с их программно-аппаратной реализацией

25. Формулировка теоремы Кука–Левина и доказательство первой части теоремы.
26. Формулировка теоремы Кука–Левина и доказательство второй части теоремы.
27. Примеры NP-полных проблем: 3-выполнимость КНФ, $(0,1)$ -целочисленное линейное программирование, клика, вершинное покрытие, покрытие множества.

5. Типовые задачи к экзамену

I. Задачи на ДНФ

1. По заданной ФАЛ построить её сокращённую ДНФ, ДНФ Квайна, ДНФ сумма тупиковых, все тупиковые ДНФ.

II. Задачи на структурное моделирование и эквивалентные преобразования

2. По заданной формуле с поднятыми отрицаниями построить моделирующую её π -схему и обратно.
3. По заданным эквивалентным формулам или КС построить эквивалентное преобразование, переводящее их друг в друга с помощью основных тождеств.

III. Задачи на синтез схем

4. По данной каскадной КС построить инверсную каскадную КС.
5. По заданной ФАЛ с помощью простейших методов, метода каскадов или метода Шеннона построить реализующую её СФЭ или КС.
6. Оценить сверху и снизу сложность конкретной ФАЛ или сложность самой сложной ФАЛ из заданного множества в заданном классе схем.

IV. Задачи на самокоррекцию и тесты.

7. По заданной КС построить эквивалентную ей самокорректирующуюся КС.
8. По заданной таблице или КС и списку её неисправностей построить все тупиковые проверяющие (диагностические) тесты.

6. Планы семинарских занятий

Общий план содержит 8 семинарских занятий.

Семинар 1

Представление ФАЛ с помощью ДНФ, импликанты и простые импликанты ФАЛ. Сокращённая ДНФ и методы её построения.

Теоретический материал [1: с. 27-35], [5: с. 47, 296-298].

В классе. Из [5]: гл. I – 2.3 (3); гл. IX – 2.1 (1,2), 2.5 (1,5), 2.6 (1,5), 2.3 (1,2), 2.2 (1,2), 2.9 (1,2).

На дом. Из [5]: гл. I – 2.3 (4); гл. IX – 2.1 (3), 2.5 (2,6), 2.6 (2,6), 2.2 (3,4), 2.3 (3,4), 2.9 (6).

Семинар 2

Ядро и ДНФ Квайна, ДНФ сумма тупиковых. Построение всех тупиковых ДНФ.

Теоретический материал [1: с. 38-43, 51-55], [5: с. 301-302].

В классе. Из [5, гл. IX]: 3.1 (1, 5), 3.3 (1, 2 – построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых), 3.4 (3), 3.6 (1, 4, 7).

На дом. Из [5, гл. IX]: 3.1 (4, 6), 3.3 (3, 4 – построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых), 3.4 (4), 3.6 (3, 6, 8).

Семинар 3

Эквивалентные преобразования формул.

Теоретический материал [1: с. 146-148, 156-161], [4: с. 19].

В классе. Из [4]: 3.1 (1), 3.3 (1, 4), 3.8 (1-3), 3.9 (1).

На дом. Из [4]: 3.1 (2), 3.3 (3, 6), 3.8 (5-9), 3.9 (2).

Семинар 4

Моделирование формул и π -схем. Эквивалентные преобразования КС.

Теоретический материал [1: с. 169-185].

В классе. Промоделировать π -схемой какую-нибудь формулу с поднятыми отрицаниями. Промоделировать формулой какую-нибудь π -схему. Из [4]: 4.1 (2, 4, 6–8), 4.3 (1).

На дом. Промоделировать π -схемой какую-нибудь формулу с поднятыми отрицаниями. Промоделировать формулой какую-нибудь π -схему. Из [4]: 4.1 (9–12), 4.3 (3).

Семинар 5

Сложность ФАЛ и методы синтеза схем на основе ДНФ.

Теоретический материал [1: с. 186-210].

В классе. Из [5: гл. X]: 1.1 (2, 3, 4, ФАЛ μ_1 – как в классе СФЭ, так и в классе КС, а также ФАЛ $(x_1 \vee x_2)x_3 \vee (\bar{x}_1 \vee x_2)x_4$ – в классе КС); 2.4 (1); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем.

На дом. Из [5: гл. X]: 1.1 (5-7), 2.4 (2); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем.

Семинар 6

Каскадные КС и СФЭ; метод каскадов для КС и СФЭ. Метод Шеннона.

Теоретический материал [1: с. 186-210].

В классе. Из [5: гл. X]: 2.13 (1, 7), 2.14 (1), 2.14 (5 – как КС, так и СФЭ) и т.п. Разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС по методу Шеннона.

На дом. Из [5: гл. X]: 2.13 (2, 6), 2.14 (2), 2.14 (6 – как КС, так и СФЭ). Разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС по методу Шеннона.

Семинар 7

Тесты для таблиц, тесты для контактных схем.

Теоретический материал: [1: с. 65-72, 51-55], [4: с.32-34, 37-38].

В классе. Из [4]: 5.1 (1, 2 – все тупиковые диагностические тесты), 5.1 (3 – все тупиковые проверяющие тесты), 6.2, 6.4, 6.11 (если хватит времени).

На дом. Из [4]: 5.1 (5 – все тупиковые диагностические тесты, 6 – все тупиковые проверяющие тесты), 6.3, 6.5, 6.14.

Семинар 8

Синтез схем для ФАЛ из специальных классов. Синтез самокорректирующихся КС.

Теоретический материал [1, с. 215-216, 222-224], [4: с. 49-50].

В классе. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ равных 1 при $x_1=1$ (КС), класса всех самодвойственных ФАЛ (СФЭ), класса всех ФАЛ симметричных по первым трём БП (КС). Из [4]: 7.9 (б), 7.10 (1), 7.13 (по книге [4] 2002 года: 7.7 (б), 7.8 (1), 7.11 (1)).

На дом. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ, равных 0 при $x_1=x_2=0$ (КС), класса, состоящего из всех тех ФАЛ, у которых любая подфункция от первых трёх БП линейна (СФЭ). Из [4]: 7.9 (в), 7.10 (2), 7.11 (а) (по книге [4] 2002 года: 7.7 (в), 7.8 (2), 7.9 (а)).

7. Литература

Основная:

1. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. – М.: МГУ, 2004. (Электронные версии лекций последних лет можно найти по адресу [http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_\(3-й_поток\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток)))
2. Яблонский С.В. Элементы математической кибернетики. – М.: Высшая школа, 2007.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
4. Алексеев В.Б., Вороненко А.А., Ложкин С.А., Романов Д.С., Сапоженко А.А., Селезнёва С.Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики». – М.: МГУ, 2011.
5. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Сапоженко А.А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. – М.: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ, 2001.

Дополнительная:

7. Алексеев В.Б., Ложкин С.А. Элементы теории графов, схем и автоматов. – М.: МГУ, 2000.
8. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1974.
9. Ложкин С.А., Марченко А.М., Шуплецов М. С. Математические модели и методы синтеза СБИС. (<http://mk.cs.msu.ru/images/8/87/Lozhkin-Marchenko-VSLI-models.pdf>)
10. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: МГУ, 1984.
11. Нигматулин Р.Г. Сложность булевых функций. – М.: Наука, 1991.

8. Особенности организации и контроля аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Данный вариант курса «Основы кибернетики» является достаточно сложным и объёмным математическим курсом, усвоение которого требует от студентов полноценной и регулярной как аудиторной, так и самостоятельной работы, что невозможно без чёткой организации занятий, строгой дисциплины и систематического контроля. При этом необходимо, чтобы в рамках самостоятельной работы¹ студенты систематически прорабатывали пройденный материал.

9. О проведении экзамена по курсу «Основы кибернетики»

Предполагается по курсу «Основы кибернетики» на 3-м потоке 3-го курса летом 2022 года проводить экзамен в один день и в одно время. Для студентов, согласных с предварительной оценкой, будет организована сдача экзамена в упрощенном формате, предполагающем опрос только по формулировкам определений и утверждений курса (отметим, что по результатам опроса предварительная оценка может быть понижена). Каждый студент, не согласный со своей предварительной оценкой, должен будет сдать экзамен письменно. Экзаменационный вариант будет состоять из 12 заданий, по тематике и типу повторяющихся задания обеих контрольных работ: первые 6 заданий дублируют первую контрольную работы, вторые 6 заданий — вторую (всего 4 составных теоретических вопроса и 8 задач). В случае, если результаты ровно одной из двух контрольных работ студента устраивают, он может переписывать другую, сообщив об этом письменно на первой странице экзаменационной работы рядом с указанием номера варианта. Каждая контрольная работа, написанная на «2» или «3-», должна быть переписана обязательно. После проверки экзаменационных работ старые оценки всех переписанных контрольных работ заменятся новыми оценками, полученными в результате проверки. Бонусы и критерии оценки при пересчете оценок сохраняются со следующей поправкой: от 80 баллов в по столбальной шкале — «отлично», от 65 до 79 баллов — «хорошо», от 50 до 64 баллов — «удовлетворительно», менее 50 баллов — «неудовлетворительно». На переписывание одной контрольной работы на экзамене студенту предоставляется 90 минут, на переписывание двух — 180 минут. По итогам проверки студент может получить любую возможную оценку (от «неудовлетворительно» до «отлично»). Каждый студент должен до 16.06.2022 г. сообщить старосте своей группы, как именно он предполагает сдавать экзамен (упрощенный формат / переписывание 1-й контрольной работы / переписывание 2-й контрольной работы / трехчасовой письменный экзамен).

Желаем успешного освоения курса и отличной сдачи экзамена!

¹ 1 час самостоятельной работы на 1 час аудиторных занятий.