Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 34

Алгоритм проверки моделей для TCTL
Временны́е регионы
Системы регионов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Вступление

Задача MC-TCTL: для заданного корректного временно́го автомата $\mathcal{A}$ и заданной tctl-формулы φ проверить соотношение $\mathcal{A} \models \varphi$

Задача MC-CTL: для заданной модели Крипке M и заданной ctl-формулы φ проверить соотношение $M \models \varphi$

Синтаксис CTL строго шире синтаксиса TCTL

Семантика CTL похожа на семантику TCTL, но существенно различается из-за особенностей отсчёта времени

Эти две логики настолько похожи друг на друга, что можно попробовать *свести* решение MC-TCTL к решению MC-CTL

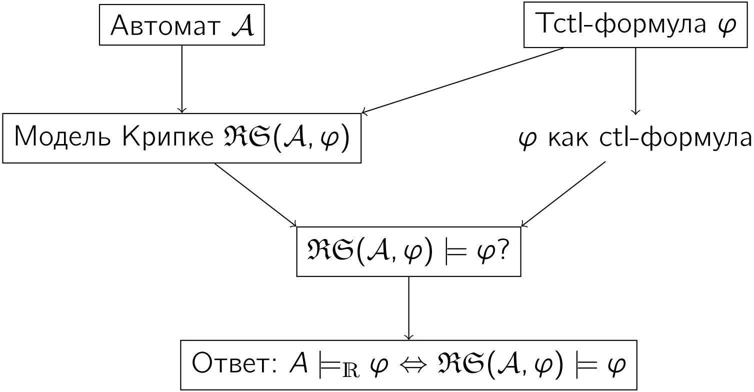
Чтобы нагляднее различать отношения выполнимости в смысле CTL и в смысле TCTL, будем отношение выполнимости для TCTL записывать так: $\models_{\mathbb{R}}$

Общая схема MC-TCTL

Дано: временной автомат $\mathcal{A}$, tctl-формула φ над множествами атомарных высказываний AP и часов $\mathcal{C}$

Требуется проверить справедливость соотношения $\mathcal{A} \models_{\mathbb{R}} \varphi$

Схема проверки:



Модель $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$ будет называться системой регионов для автомата $\mathcal{A}$ и формулы φ

Общая схема MC-TCTL

$AC(\mathcal{A})$ и $AC(\varphi)$ — так будем обозначать все атомарные временны́е ограничения, содержащиеся соответственно в $\mathcal{A}$ и в φ

Система $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$ будет строиться над множеством $\mathsf{AP} \cup AC(\varphi)$ (*и тогда можно считать φ ctl-формулой*)

Каждая конфигурация автомата будет отвечать некоторому состоянию системы $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$:

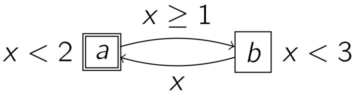
- Множесто всех оценок часов будет разбито на классы эквивалентности (регионы)
- Оценка ν будет отвечать её региону $[\nu]$
- Конфигурация (s, ν) будет отвечать состоянию $(s, [\nu])$
- $[(0, 0, \dots, 0)] = \{(0, 0, \dots, 0)\}$

Шаг вычисления $(s_1, \nu_1) \to (s_2, \nu_2)$ автомата будет отвечать пути $(s_1, [\nu_1]) \to \dots \to (s_2, [\nu_2])$ в системе регионов (*и, в частности, все покрывающиеся конфигурации станут явными*)

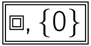
Состояние $(s, [\nu])$ будет размечаться высказываниями из AP согласно s и ограничениями из $AC(\varphi)$ согласно ν

Общая схема MC-TCTL

Пример: попробуем при помощи «пристального взгляда» построить подходящую модель Крипке (хотя и не в точности $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$) для таких автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:



$\mathbf{AGAF}(x = 1)$



Единственное начальное состояние модели — это ⧈ со значением 0 часов x

Общая схема MC-TCTL

Пример: попробуем при помощи «пристального взгляда» построить подходящую модель Крипке (хотя и не в точности $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$) для таких автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:

$$\begin{tikzcd} x < 2 \; \boxed{\boxed{a}} \arrow[r, bend left, "x \geq 1"] & \boxed{b} \; x < 3 \arrow[l, bend left, "x"] \end{tikzcd} \qquad \mathbf{AGAF}(x = 1)$$

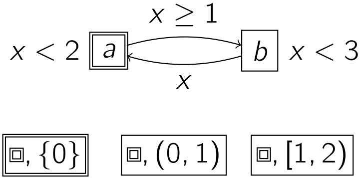
$$\boxed{\boxed{\boxed{\square}, \{0\}}} \longrightarrow \boxed{\boxed{\square}, (0, 2)}$$

Начав вычисление в $(\boxed{\square}, 0)$, $\mathcal{A}$ обязан продвинуть время, и может продвинуть часы до любого значения интервала $(0, 2)$

Для начала запишем все такие продвижения времени как один переход в модели

Общая схема MC-TCTL

Пример: попробуем при помощи «пристального взгляда» построить подходящую модель Крипке (хотя и не в точности $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$) для таких автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:



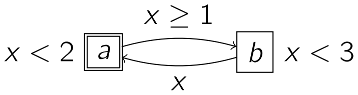
$$\mathbf{AGAF}(x = 1)$$

Для значений часов из $[1, 2)$ открыт верхний переход автомата, а для значений из $(0, 1)$ этот переход закрыт

Чтобы **детерминированно** воспроизвести шаги вычисления автомата, следует разбить состояние $(⧈, (0, 2))$ на два: $(⧈, (0, 1))$ и $(⧈, [1, 2))$

Общая схема MC-TCTL

Пример: попробуем при помощи «пристального взгляда» построить подходящую модель Крипке (хотя и не в точности $\mathfrak{RS}(\mathcal{A},\varphi)$) для таких автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:



$$\mathbf{AGAF}(x = 1)$$

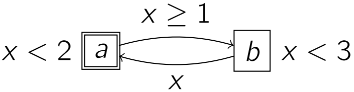
$$\boxed{\boxbox, \{0\}} \longrightarrow \boxed{\boxbox, (0,1)} \longrightarrow \boxed{\boxbox, [1,2)}$$

Когда автомат **непрерывно** ожидает (продвигает время), начав в $(\boxbox, 0)$, значение часов последовательно проходит через интервалы $\{0\}$, $(0,1)$ и $[1,2)$

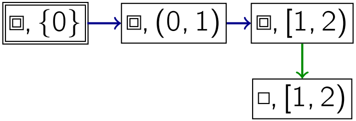
Чтобы воспроизвести все варианты такого ожидания, соединим соответствующие состояния по порядку

Общая схема MC-TCTL

Пример: попробуем при помощи «пристального взгляда» построить подходящую модель Крипке (хотя и не в точности $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$) для таких автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:



AGAF$(x = 1)$



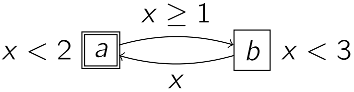
Для каждой конфигурации вида $(⧈, d)$, где $1 \leq d < 2$,

верно соотношение $(⧈, d) \xhookrightarrow{⧈ \xrightarrow{x \geq 1} \square} (\square, d)$

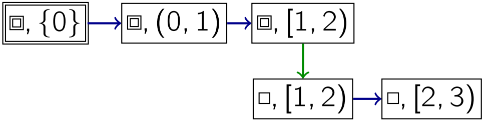
Добавим в модель переход, воспроизводящий все такие шаги вычисления автомата

Общая схема MC-TCTL

Пример: попробуем при помощи «пристального взгляда» построить подходящую модель Крипке (хотя и не в точности $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$) для таких автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:



AGAF$(x = 1)$

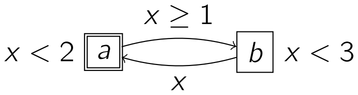


Когда автомат ожидает, начав в $(\square, d)$, где $1 \leq d < 2$, значение часов может пройти через остаток интервала $[1, 2)$ и через часть интервала $[2, 3)$

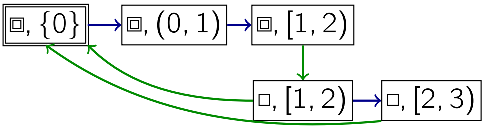
Добавим в модель переход, воспроизводящий такое ожидание

Общая схема MC-TCTL

Пример: попробуем при помощи «пристального взгляда» построить подходящую модель Крипке (хотя и не в точности $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$) для таких автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:



$$\mathbf{AGAF}(x = 1)$$



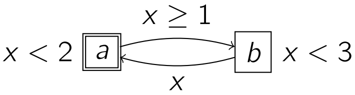
Для каждой конфигурации $(\Box, d)$, где $1 \leq d < 3$,

верно соотношение $(\Box, d) \xhookrightarrow{\Box \xrightarrow{x} \boxed{\Box}} (\boxed{\Box}, 0)$

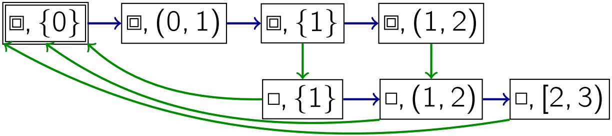
Добавим в модель переходы, отвечающие всем таким шагам вычисления автомата

Общая схема MC-TCTL

Пример: попробуем при помощи «пристального взгляда» построить подходящую модель Крипке (хотя и не в точности $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$) для таких автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:



AGAF$(x = 1)$

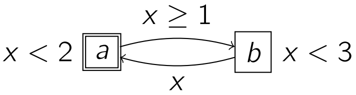


$(x = 1) \equiv (x \leq 1 \,\&\, \neg(x < 1))$:
в формуле φ содержатся ограничения $x \leq 1$ и $x < 1$

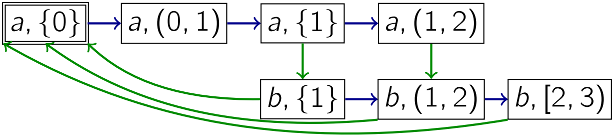
Чтобы **детерминированно** разметить состояния модели этими ограничениями, следует разбить в каждом состоянии модели интервал $[1, 2)$ на два: $\{1\}$ и $(1, 2)$

Общая схема MC-TCTL

Пример: попробуем при помощи «пристального взгляда» построить подходящую модель Крипке (хотя и не в точности $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$) для таких автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:



$\mathbf{AGAF}(x = 1)$

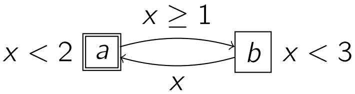


Получилась модель Крипке M, содержащая
в точности все шаги вычисления автомата $\mathcal{A}$
и все неявно покрытые конфигурации таких шагов

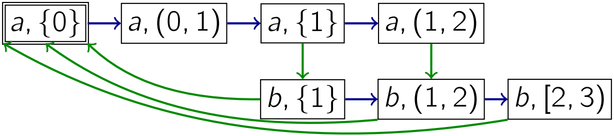
Нетрудно видеть, что $A \models_{\mathbb{R}} \varphi$ и $M \models \varphi$

Общая схема MC-TCTL

Пример: попробуем при помощи «пристального взгляда» построить подходящую модель Крипке (хотя и не в точности $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$) для таких автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:



$$\mathbf{AGAF}(x = 1)$$



Теперь перейдём к трудной части: в общем случае ...

- как устроить множества оценок (регионы), чтобы обеспечить требуемое соответствие, детерминированность и конечность?
- как совместить состояния автомата, регионы и переходы, чтобы чудесным образом превратить «$\models_{\mathbb{R}}$» в «$\models$»?

Временны́е регионы

Разбиение оценок часов на классы основывается на региональном отношении эквивалентности оценок часов ($\approx$)

Полное подробное определение этого отношения будет приведено далее, и оно будет описываться постепенно (поэтапно)

Временной регион — это класс эквивалентности отношения $\approx$

Временны́е регионы — это множества оценок часов, использующиеся в качестве второго компонента состояния системы регионов

$\mathfrak{R}$ — так будем обозначать семейство всех временны́х регионов

Временны́е регионы

Особенности устройства отношения $\approx$, которые необходимы для соответствия содержательному краткому описанию системы регионов и для всех технических тонкостей, возникших в примере, строго можно определить так:

- Конечность: общее число классов эквивалентности отношения $\approx$ конечно
  - $\Rightarrow$ множество состояний системы регионов конечно, и можно к ней применять известные алгоритмы анализа конечных моделей Крипке
- Неразличимость временны́ми ограничениями: если $\nu_1 \approx \nu_2$ и $ag \in AC(\mathcal{A}) \cup AC(\varphi)$, то $\nu_1 \models ag \Leftrightarrow \nu_2 \models ag$
  - $\Rightarrow$ детерминированность относительно предусловий и разметки состояний
- Корректный сброс: если ρ — регион и X — множество часов, то $\rho[X] = \{\nu[X] \mid \nu \in \rho\}$ — тоже регион
  - $\Rightarrow$ детерминированность относительно сброса часов при выполнении переходов автомата
- Корректное ожидание: для любого региона ρ существует единственный регион ρ^+, следующий за ρ при непрерывном ожидании автомата
  - $\Rightarrow$ детерминированность относительно продвижения времени автоматом

Временны́е регионы

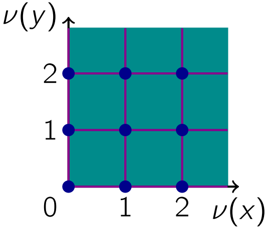
Первая (неудачная) попытка определить $\approx$

$\lfloor t \rfloor$ и $frac(t)$ — так будем обозначать соответственно целую и дробную часть числа действительного числá t

$\nu_1 \approx_1 \nu_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ для любых часов x верно следующее:

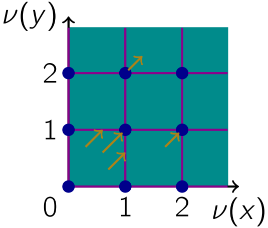
1. $\lfloor \nu_1(x) \rfloor = \lfloor \nu_2(x) \rfloor$
2. $frac(\nu_1(x)) = 0 \Leftrightarrow frac(\nu_2(x)) = 0$

Пример: регионы отношения $\approx_1$ для пары часов x, y изображены ниже как связные одноцветные области числовой плоскости



Временны́е регионы

Первая (неудачная) попытка определить $\approx$



Хорошие свойства $\approx_1$:

- Неразличимость временны́ми ограничениями
- Корректный сброс

Плохие свойства $\approx_1$:

- $|\mathfrak{R}| = \infty$
- Невозможно однозначно определить ρ^+
  - примеры пар (ρ, ρ^+) изображены выше стрелками

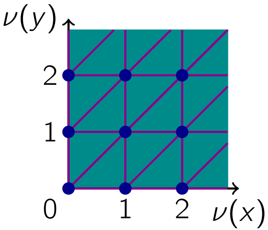
Временны́е регионы

Вторая (неудачная) попытка определить $\approx$

$\nu_1 \approx_2 \nu_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ для любых часов x, y верно следующее:

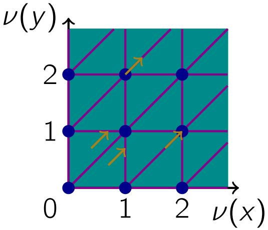
1. $\lfloor \nu_1(x) \rfloor = \lfloor \nu_2(x) \rfloor$
2. $frac(\nu_1(x)) = 0 \Leftrightarrow frac(\nu_2(x)) = 0$
3. $frac(\nu_1(x)) \le frac(\nu_1(y)) \Leftrightarrow frac(\nu_2(x)) \le frac(\nu_2(y))$

Пример: регионы отношения $\approx_2$ для пары часов x, y изображены ниже как связные одноцветные области числовой плоскости



Временны́е регионы

Вторая (неудачная) попытка определить $\approx$



Хорошие свойства $\approx_2$:

- Неразличимость временны́ми ограничениями
- Корректный сброс
- Корректное ожидание

Плохие свойства $\approx_2$:

- $|\mathfrak{R}| = \infty$

Временны́е регионы

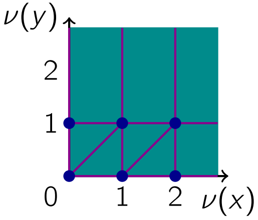
Определение $\approx$ (*третья попытка, удачная*)

k_x — так будем обозначать максимальное целое число, встречающееся в правых частях ограничений из $AC(\mathcal{A}) \cup AC(\varphi)$

$\nu_1 \approx \nu_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ для любых часов x, y верно следующее:

1. $\nu_1(x) > k_x \Leftrightarrow \nu_2(x) > k_x$
2. если $\nu_1(x) \leq k_x$ и $\nu_1(y) \leq k_y$, то
   - $\lfloor \nu_1(x) \rfloor = \lfloor \nu_2(x) \rfloor$,
   - $frac(\nu_1(x)) = 0 \Leftrightarrow frac(\nu_2(x)) = 0$ и
   - $frac(\nu_1(x)) \leq frac(\nu_1(y)) \Leftrightarrow frac(\nu_2(x)) \leq frac(\nu_2(y))$

Пример: регионы для пары часов x, y и констант $k_x = 2$, $k_y = 1$ изображены ниже как связные одноцветные области числовой плоскости



Оценка числá регионов

Утверждение. $|\mathcal{C}|! \cdot \prod\limits_{x\in\mathcal{C}} k_x \le |\mathfrak{R}| \le |\mathcal{C}|! \cdot 2^{|\mathcal{C}|-1} \cdot \prod\limits_{x\in\mathcal{C}} (2k_x+2)$

Доказательство. Ограничимся пояснениями всех множителей в оценках:

- $\prod\limits_{x\in C} k_x$ — это количество единичных $|\mathcal{C}|$-мерных кубов, которыми можно покрыть декартово произведение всех интервалов $[0, k_x]$
- $|C|!$ — столькими способами можно упорядочить дробные части значений часов
  - В оценке снизу: по крайней мере столько регионов содержится во внутренности одного единичного куба
- $2k_x + 2$ — это общее число попарно различных интервалов значений часов x в регионах: $\{0\}; (0,1); \{1\}; (1,2); \{2\}; \ldots$
- $2^{|C|-1}$ — столькими способами можно для заданного порядка дробных частей объявить, какие из этих дробных частей равны ▼

Следствие (конечность отношения $\approx$). $|\mathfrak{R}| < \infty$

Другие свойства регионов

Утверждение (неразличимость временны́ми ограничениями)
Для любых часов x, оценок ν_1 и ν_2, таких что $\nu_1 \approx \nu_2$, и числа́ $k \in \mathbb{N}_0$ верно:

$$\begin{array}{lcll} \nu_1 \models x < k & \Leftrightarrow & \nu_2 \models x < k & \textbf{и} \\ \nu_1 \models x \leq k & \Leftrightarrow & \nu_2 \models x \leq k & \end{array}$$

Временно́е ограничение g над атомарными ограничениями $ACC_A \cup ACC_\varphi$ выполняется в регионе ρ ($\rho \models g$), если для любой оценки часов ν из ρ верно $\nu \models g$

Утверждение (корректный сброс). **Для любого региона ρ и любого множества часов X множество $\rho[X]$ является регионом**

Другие свойства регионов

Регион называется открытым для часов x, если он содержит оценку ν, такую что $\nu(x) > k_x$

Регион называется открытым, если он открыт для всех часов, а иначе — закрытым

ρ^+ — это регион, следующий за регионом ρ:

- Если ρ открыт, то $\rho^+ = \rho$
- Иначе ρ^+ — регион, для которого верно следующее:
  - $\rho^+ \neq \rho$
  - Если $\nu \in \rho$ и $(\nu + d) \in \rho^+$, где $d \in \mathbb{R}_{>0}$, то для любого d' из $\mathbb{R}_{>0}$, такого что $d' < d$, верно $(\nu + d') \in \rho \cup \rho^+$

Утверждение (корректное ожидание)

За любым регионом ρ следует ровно один регион

Для лучшего понимания регионов можете попробовать строго доказать последние три утверждения

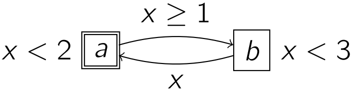
Системы регионов

Для временнóго автомата $\mathcal{A} = (S, s_0, \mathcal{I}, T, L)$ и tctl-формулы φ ...

- региональным состоянием будем называть пару $(s, \rho) \in S \times \mathfrak{R}$
- системой регионов будем называть модель Крипке $\mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi)$, задающуюся как подграф следующего графа Γ, порождённый множеством всех вершин, достижимых из начальной:
  - Вершины Γ — это всевозможные региональные состояния
  - Вершина $(s_0, \{(0, 0, \ldots, 0)\})$ — начальная
  - Каждая вершина (s, ρ) помечена множеством
    $$L(s) \cup \{ag | ag \in AC(\varphi),\ \rho \models ag\}$$
  - Дуга $(s, \rho) \to (s', \rho')$ входит в Γ $\Leftrightarrow$ верно хотя бы одно из двух:
    1. $\rho' = \rho^+$, $s' = s$ и $\rho^+ \models \mathcal{I}(s)$
    2. В $\mathcal{A}$ существует переход $s \xrightarrow{g,X} s'$, такой что $\rho \models g$, $\rho' = \rho[X]$, и $\rho' \models \mathcal{I}(s')$

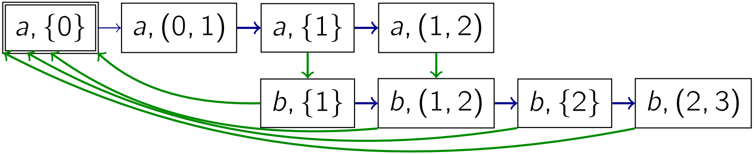
Системы регионов

Пример



AGAF$(x = 1)$

Система регионов для изображённых автомата и формулы устроена так (*атомарные временны́е ограничения, помечающие состояние, изображены как подходящие интервалы значений часов* x):



Теорема. **Для любого <u>корректного</u> временнóго автомата $\mathcal{A}$ и любой tctl-формулы φ верно:**

$$\mathcal{A} \models_{\mathbb{R}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{RS}(\mathcal{A}, \varphi) \models \varphi$$

Доказательство опустим: его объём и трудность намного превосходят пользу включения его в рассказ