

Языки описания схем

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Языки описания схем

Блок 2

Вспоминаем дискретную математику:

булевы функции,
булевы формулы,
схемы из функциональных элементов

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025/2026, осенний семестр

Булевы функции, таблицы значений

$B = \{0, 1\}$ — **булево множество** (множество **булевых значений**)
 (в курсе «Дискретная математика» бакалавриата это было E_2)

Булева функция местности n — это отображение $f : B^n \rightarrow B$

Способы записи **таблицы значений** n -местной булевой функции f :

► Одномерный

x_1, \dots, x_n	$f(x_1, \dots, x_n)$
...	...
$\alpha_1, \dots, \alpha_n$	$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
...	...

► Двумерный

$f(\tilde{x}_n)$		$x_{k+1}x_{k+2} \dots x_n$		
		...	$\alpha_{k+1}\alpha_{k+2} \dots \alpha_n$...
$x_1x_2 \dots x_k$
	$\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$...	$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$...

Булевы функции, таблицы значений

Таблицы значений некоторых функций:

Отрицание

x	$\bar{x}/(\neg x)$
0	1
1	0

Дизъюнкция

$(x \vee y)$		y	
		0	1
x	0	0	1
	1	1	1

Конъюнкция

$(x \& y)$		y	
		0	1
x	0	0	0
	1	0	1

Импликация

$(x \rightarrow y)$		y	
		0	1
x	0	1	1
	1	0	1

Сумма по модулю 2

$(x \oplus y)$		y	
		0	1
x	0	0	1
	1	1	0

Эквивалентность

$(x \sim y)$		y	
		0	1
x	0	1	0
	1	0	1

Штрих Шеффера

$(x y)$		y	
		0	1
x	0	1	1
	1	1	0

Стрелка Пирса

$(x \downarrow y)$		y	
		0	1
x	0	1	0
	1	0	0

Булевы формулы

Синтаксис (форма записи) **булевых формул** над набором булевых переменных x_1, \dots, x_n задаётся следующей формой Бэкуса-Наура:

$$\varphi ::= 0 \mid 1 \mid x \mid f(\varphi_1, \dots, \varphi_k),$$

где $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ — формулы, x — любая из переменных x_1, \dots, x_n и f — k -местная булева функция

Замечание: в этом курсе, в отличие от курса «Дискретная математика» бакалавриата, не затрагиваются вопросы полноты систем булевых функций, и в связи с этим в записи формул по умолчанию разрешено использовать все булевы функции

Приоритеты операций, согласно которым в записи формулы принято опускать скобки (по убыванию):

\neg , затем $\&$, затем \vee , затем \oplus и \sim , затем \rightarrow

Пример формулы: $x \oplus y \vee (\bar{x} \& z)$

Булевы формулы

Формулой φ над набором переменных x_1, \dots, x_n реализуется n -местная булева функция $[\varphi]$, определяемая так:

- ▶ $[0](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$
- ▶ $[1](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$
- ▶ $[x_i](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_i$
- ▶ $[f(\varphi_1, \dots, \varphi_k)](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f([\varphi_1](\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, [\varphi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n))$

Пример: формулой $(x \oplus y) \vee \bar{x} \& z$ над переменными x, y, z реализуется трёхместная функция f со следующей таблицей значений:

$f(x, y, z)$		yz			
		00	01	10	11
x	0	0	1	1	1
	1	1	0	1	0

Схемы из функциональных элементов

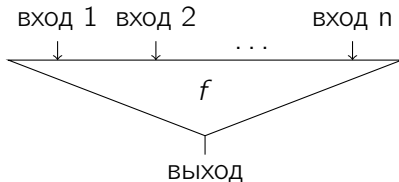
Один из способов представления булевых функций (и систем булевых функций), ориентированных на цифровые схемы, — это **схемы из функциональных элементов (СФЭ)**

СФЭ строится из **функциональных элементов (ФЭ)**

В ФЭ содержатся:

- ▶ булева функция f (местности n)
- ▶ n **входов**, пронумерованных числами $1, 2, \dots, n$
- ▶ один **выход**

Изображение ФЭ:



Схемы из функциональных элементов

Если в ФЭ содержится n -местная функция f
и на входы **посланы** булевы значения $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α_i — на i -й вход),
то на выходе **получается** значение $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

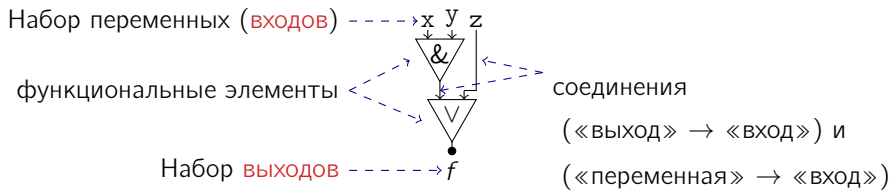
Пример:



- ▶ Посылаем (00) \Rightarrow получаем $0 \& 0$, то есть 0
- ▶ Посылаем (01) \Rightarrow получаем $0 \& 1$, то есть 0
- ▶ Посылаем (10) \Rightarrow получаем $1 \& 0$, то есть 0
- ▶ Посылаем (11) \Rightarrow получаем $1 \& 1$, то есть 1

Схемы из функциональных элементов

Как устроена СФЭ:

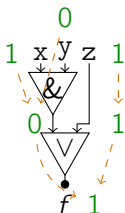


Другие особенности СФЭ:

- ▶ Выходы ФЭ и переменные могут быть произвольно объявлены выходами
- ▶ Выход ФЭ может быть соединён с несколькими входами ФЭ
- ▶ Запрещено вводить в СФЭ «цепочку» соединений, начинающуюся на выходе ФЭ и оканчивающуюся на входе того же ФЭ

Схемы из функциональных элементов

Как функционирует СФЭ:



- ▶ На входы x_1, \dots, x_n посылаются булевы значения $\alpha_1, \dots, \alpha_n$
- ▶ Значение в любой точке СФЭ «продвигается» вперёд по соединениям
- ▶ Значения, «продвинувшиеся» на входы ФЭ, посылаются в этот ФЭ, и на выходе ФЭ появляется соответствующее булево значение
- ▶ В каждом выходе схемы **реализуется** n -местная булева функция f следующего вида:
 $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — значение, появляющееся на этом выходе, если на входы СФЭ посланы значения $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

Схемы из функциональных элементов

Полное строгое определение СФЭ над набором переменных x_1, \dots, x_n

Это размеченный ациклический ориентированный мультиграф Σ следующего вида:

- ▶ Переменные x_1, \dots, x_n являются вершинами Σ , и эти вершины называются входами
- ▶ Во входы не ведёт ни одной дуги
- ▶ Каждая вершина, за исключением входов, помечена булевой функцией
- ▶ Если вершина помечена k -местной функцией, то в неё ведёт k дуг, и эти дуги пронумерованы числами $1, 2, \dots, k$
- ▶ Некоторые вершины объявлены выходами, и все выходы пронумерованы $(1, 2, \dots)$

Схемы из функциональных элементов

Полное строгое определение СФЭ над набором переменных x_1, \dots, x_n

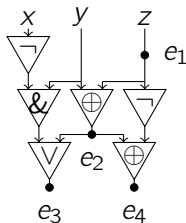
В вершине x , где x — переменная, реализуется функция $[x]$

Если в вершинах v_1, \dots, v_k реализуются функции $[\varphi_1], \dots, [\varphi_k]$ и в СФЭ содержатся дуги $v_1 \xrightarrow{1} v, \dots, v_k \xrightarrow{k} v$, то в вершине v реализуется функция $[f(\varphi_1, \dots, \varphi_k)]$

Схемой **реализуется** система функций (f_1, \dots, f_k) , где k — количество выходов и f_i — функция, реализующаяся в i -м выходе

Схемы из функциональных элементов

Пример напоследок:



Схемой над переменными x, y, z реализуется набор функций
 $(f_1, f_2, f_3, f_4) = ([z], [y \oplus z], [\neg x \& y \vee (y \oplus z)], [y \oplus z \oplus \neg z])$:

x, y, z	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$	$f_3(x, y, z)$	$f_4(x, y, z)$
000	0	0	0	1
001	1	1	1	1
010	0	1	1	0
011	1	0	1	0
100	0	0	0	1
101	1	1	1	1
110	0	1	1	0
111	1	0	0	0