Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Семинар 2

Свойства безопасности и живости

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Задача 1.1 (живость)

Доказать, что предложенное утверждение φ верно для предложенной распределённой системы

Система состоит из одного узла, устроенного так

Узел содержит одну переменную $x : \mathbb{Z}/n$, где n — неизвестное положительное число

Код узла:

$$\begin{aligned}&\mathrm{do}\ \{\\&\quad x := x - 1;\\&\}\ \mathrm{until}(x \leq 0)\end{aligned}$$

φ: Вычисление системы рано или поздно достигает тупиковой конфигурации

Задача 1.2 (живость)

Доказать, что предложенное утверждение φ **в общем случае неверно** для предложенной распределённой системы в условиях слабой справедливости для всех указанных действий

Система состоит из двух узлов, A_0 и A_1, устроенных так

Каждый узел A_i содержит одну переменную $x_i : \mathbb{Z}$

Узел A_i содержит два действия:

$\mathcal{R}_i$:

1. $\mathrm{receive}_{A_{1-i}}(v)$
2. Если $x_i > v$, то $x_i := x_i - 1$;
3. Иначе: если $x_i < v$, то $x_i := x_i + 1$;
4. Иначе действие больше ни разу не выполняется (навсегда становится недопустимым)

$\mathcal{S}_i$:

1. $\mathrm{send}_{A_{1-i}}(x_i)$

φ: В любом вычислении системы рано или поздно оба действия $\mathcal{R}_i$ становятся недопустимыми

Задача 1.3 (живость)

Доказать, что предложенное утверждение φ верно для предложенной распределённой системы в условиях слабой справедливости для всех указанных действий

Система состоит из двух узлов, A_0 и A_1, устроенных так

Каждый узел A_i содержит одну переменную $x_i : \mathbb{Z}$

Узел A_i содержит два действия:

$\mathcal{R}_i$:

1. $\mathrm{receive}_{A_{1-i}}(v)$
2. Если $x_i > v + 1$, то $x_i := x_i - 1$;
3. Иначе: если $x_i < v - 1$, то $x_i := x_i + 1$;
4. Иначе действие больше ни разу не выполняется (навсегда становится недопустимым)

$\mathcal{S}_i$:

1. $\mathrm{send}_{A_{1-i}}(x_i)$

φ: В любом вычислении системы рано или поздно оба действия $\mathcal{R}_i$ становятся недопустимыми

Задача 2.1 (безопасность)

Доказать, что утверждение φ является инвариантом предложенной распределённой системы, и на основании этого обосновать утверждение ψ

Система состоит из одного узла, устроенного так

Переменные:

- $x : \mathbb{Z}/2$
- $y : \mathbb{Z}/3$

Единственное действие:

1. $x := x - 1;$
2. $y := y + 1;$

φ: $x + y = 5$

ψ: В любой достижимой конфигурации верно неравенство $x + y < 10$

Задача 2.2 (безопасность BSWP)

Устройство узла p (узел q устроен «симметрично»)

- $\ell_p : \mathbb{N}_0 = 0$
- $r_p : \mathbb{N}_0 = 0$
- $in_p : ARR[\mathcal{T}]$
- $out_p : ARR[\mathcal{T}] = (\bot, \bot, \bot, \dots);$

Действие S$_p$: $\{\ell_p < r_p + \mathfrak{c}_p\}$

1. Выбрать $i \in \mathbb{N}_0$: $\ell_p \le i < r_p + \mathfrak{c}_p$
2. $send(\mathbf{pack}, in_p[i], i)$

Действие R$_p$: {очередь Q_p непуста}

1. $receive(\underline{\mathbf{pack}}, w, i)$
2. Если $out_p[i] = \bot$:
   - 2.1 $out_p[i] := w;$
   - 2.2 $\ell_p := \max(\ell_p, i - \mathfrak{c}_q + 1);$
   - 2.3 $r_p := \min(j \mid out_p[j] = \bot);$

Действие L$_p$ {очередь Q_p непуста}

1. $receive(\underline{\mathbf{pack}}, w, i)$

Задача 2.2 (безопасность BSWP)

p^0: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_p - 1\} : out_p[i] \neq \bot$

p^1: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (\mathbf{pack}, w, i) \in Q_p \Rightarrow w = in_q[i] \,\&(i < r_q + \mathfrak{c}_q)$

p^2: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \neq \bot \Rightarrow out_p[i] = in_q[i] \,\&(\ell_p > i - \mathfrak{c}_q)$

p^3: $\ell_p \leq r_q$

q^0: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_q - 1\} : out_q[i] \neq \bot$

q^1: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (\mathbf{pack}, w, i) \in Q_q \Rightarrow w = in_p[i] \,\&(i < \ell_p + \mathfrak{c}_p)$

q^2: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_q[i] \neq \bot \Rightarrow out_q[i] = in_p[i] \,\&(\ell_q > i - \mathfrak{c}_p)$

q^3: $\ell_q \leq r_p$

$$P^{BSWP} = p^0 \,\&\, p^1 \,\&\, p^2 \,\&\, p^3 \,\&\, q^0 \,\&\, q^1 \,\&\, q^2 \,\&\, q^3$$

Доказать, что P^{BSWP} — инвариант BSWP

Задача 2.2: начало решения

По определению инварианта, следует доказать два утверждения:

1. Для любой начальной конфигурации γ верно $P_{BSWP}(\gamma)$
2. Если $P_{BSWP}(\gamma)$ и $\gamma \to \delta$, то $P_{BSWP}(\delta)$

1.

p^0: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_p - 1\} : out_p[i] \neq \perp$

В начальной конфигурации верно $r_p = 0$

p^1: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (\textbf{pack}, w, i) \in Q_p \Rightarrow w = in_q[i] \,\&(i < r_q + \mathfrak{c}_q)$

В начальной конфигурации очередь Q_p пуста

p^2: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \neq \perp \Rightarrow out_p[i] = in_q[i] \,\&(\ell_p > i - \mathfrak{c}_q)$

В начальной конфигурации все значения $out_p[i]$ равны $\perp$

p^3: $\ell_p \leq r_q$

В начальной конфигурации верно $\ell_p = 0 \leq 0 = r_q$

q^0, q^1, q^2, q^3 — аналогично

Задача 2.2: начало решения

2. $P_{BSWP}(\gamma)\,\&(\gamma \to \delta) \Rightarrow P_{BSWP}(\delta)$

Доказательство для действия $\mathbf{R}_p$: {очередь Q_p непуста}

1. $receive(\underline{\mathbf{pack}}, w, i)$
2. Если $out_p[i] = \perp$:
    2.1 $out_p[i] := w;$
    2.2 $\ell_p := \max(\ell_p, i - \mathfrak{c}_q + 1);$
    2.3 $r_p := \min(j \mid out_p[j] = \perp);$

---

p^0: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_p - 1\} : out_p[i] \neq \perp$

Если out_p не изменяется, то и r_p не изменяется

Иначе по (2.3) после выполнения $\mathbf{R}_p$ верно $r_p = \min(j \mid out_p[j] = \perp)$

p^1: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (\mathbf{pack}, w, i) \in Q_p \Rightarrow w = in_q[i]\,\&(i < r_q + \mathfrak{c}_q)$

После выполнения $\mathbf{R}_p$ в Q_p не появляются новые пакеты, in_q не изменяется и r_q не уменьшается

Задача 2.2: начало решения

2. $P_{BSWP}(\gamma)\,\&(\gamma \to \delta) \Rightarrow P_{BSWP}(\delta)$

Доказательство для действия $\mathbf{R}_p$: {очередь Q_p непуста}

1. $receive(\underline{\mathbf{pack}}, w, i)$
2. Если $out_p[i] = \perp$:
   - 2.1 $out_p[i] := w$;
   - 2.2 $\ell_p := \max(\ell_p, i - \mathfrak{c}_q + 1)$;
   - 2.3 $r_p := \min(j \mid out_p[j] = \perp)$;

---

p^2: $\forall j \in \mathbb{N}_0 : out_p[j] \neq \perp \Rightarrow out_p[j] = in_q[j]\,\&(\ell_p > j - \mathfrak{c}_q)$

После выполнения $\mathbf{R}_p$:

- in_q и $out_p[j]$ для всех j, кроме i, не изменяются
- Если перед (2) $out_p[i] \neq \perp$, то out_p и ℓ_p не изменяются
- Если перед (2) $out_p[i] = \perp$, то:
  - Согласно p^1, после (1) верно $w = in_q[i]$
  - Значит, после (2.1) верно $out_p[i] = w = in_q[i]$
  - После (2.2) ℓ_p может только увеличиться, и согласно правой части присваивания, верно $\ell_p \geq i - \mathfrak{c}_q + 1$, то есть $\ell_p > i - \mathfrak{c}_q$

Задача 2.2: начало решения

2. $P_{BSWP}(\gamma)\,\&(\gamma \to \delta) \Rightarrow P_{BSWP}(\delta)$

Доказательство для действия $\mathbf{R}_p$: {очередь Q_p непуста}

1. $receive(\underline{\mathbf{pack}}, w, i)$
2. Если $out_p[i] = \bot$:
   - 2.1 $out_p[i] := w$;
   - 2.2 $\ell_p := \max(\ell_p, i - \mathfrak{c}_q + 1)$;
   - 2.3 $r_p := \min(j \mid out_p[j] = \bot)$;

---

p^3: $\ell_p \leq r_q$

После выполнения $\mathbf{R}_p$:

- Значение r_q не изменяется
- Если перед (2) $out_p[i] \neq \bot$, то и значение ℓ_p не изменяется
- Если перед (2) $out_p[i] = \bot$, то после (2.2):
  - Из p^1 следует $i < r_q + \mathfrak{c}_q$
  - Значит, $i - \mathfrak{c}_q + 1 < r_q + 1$, то есть $i - \mathfrak{c}_q + 1 \leq r_q$
  - Если ℓ_p изменяется, то $\ell_p = i - \mathfrak{c}_q + 1 \leq r_q$

Задача 2.2: начало решения

2. $P_{BSWP}(\gamma)\,\&(\gamma \to \delta) \Rightarrow P_{BSWP}(\delta)$

Доказательство для действия $\mathbf{R}_p$: {очередь Q_p непуста}

1. $receive(\underline{\mathbf{pack}}, w, i)$
2. Если $out_p[i] = \perp$:
   - 2.1 $out_p[i] := w$;
   - 2.2 $\ell_p := \max(\ell_p, i - \mathfrak{c}_q + 1)$;
   - 2.3 $r_p := \min(j \mid out_p[j] = \perp)$;

---

q^0: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, r_q - 1\} : out_q[i] \neq \perp$

Значения r_q и out_q не изменяются

q^1: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (\mathbf{pack}, w, i) \in Q_q \Rightarrow w = in_p[i]\,\&(i < r_p + \mathfrak{c}_p)$

Значение r_p не уменьшается, значения Q_q и in_p не изменяются

q^2: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_q[i] \neq \perp \Rightarrow out_q[i] = in_p[i]\,\&(\ell_q > i - \mathfrak{c}_p)$

Значения out_q, in_p и ℓ_q не изменяются

q^3: $\ell_q \leq r_p$

Значение ℓ_q не изменяется, r_p — не уменьшается

Задача 2.2: начало решения

2. $P_{BSWP}(\gamma)\,\&(\gamma \to \delta) \Rightarrow P_{BSWP}(\delta)$

Действие $\mathbf{S}_p$: $\{\ell_p < r_p + \mathfrak{c}_p\}$

1. Выбрать $i \in \mathbb{N}_0$: $\ell_p \leq i < r_p + \mathfrak{c}_p$
2. $send(\mathbf{pack}, in_p[i], i)$

Действие $\mathbf{L}_p$ {очередь Q_p непуста}

1. $receive(\underline{\mathbf{pack}}, w, i)$

Чтобы завершить решение, следует сделать то же самое и для этих двух действий