Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 16

Равносильность формул логики предикатов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

Вступление

Из булевой алгебры:

$A \vee B \to (C \,\&\, D \to E)$

$\quad \mapsto$ $\qquad (x \to y \mapsto \neg x \vee y)$

$\neg(A \vee B) \vee \neg(C \,\&\, D) \vee E$

$\quad \mapsto$ $\qquad (\neg(x \,\&\, y) \mapsto \neg(x \vee y);\ \ldots \mapsto \ldots)$

$\neg A \,\&\, \neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E$

$\quad \mapsto$ $\qquad (\ldots \mapsto \ldots)$

$(\neg A \vee \neg C \vee \neg D \vee E) \,\&\, (\neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E)$

Нижняя формула получена из верхней
при помощи основных тождеств булевой алгебры

Значит, можно быть уверенным в том,
что эти формулы имеют одинаковый смысл

Неплохо было бы (*и для метода резолюций, и в целом*)
уметь преобразовывать формулы **логики предикатов**
с гарантированным сохранением их смысла

Равносильность формул

Эквивалентность (логическая связка):

$\varphi \leftrightarrow \psi$ — это сокращение для формулы $(\varphi \to \psi)\,\&(\psi \to \varphi)$

Формулы φ, ψ равносильны ($\varphi \sim \psi$), если формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ общезначима

Утверждение. Для любых равносильных формул $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ ЛП, интерпретации $\mathcal{I}$ и набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно следующее:

$$\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство.

($\Rightarrow$)

$\models (\varphi \to \psi)\,\&(\psi \to \varphi)$ (по определению равносильности)

$\mathcal{I} \models ((\varphi \to \psi)\,\&(\psi \to \varphi))[\widetilde{d}^n]$ (по определению общезначимости)

$\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n]$ (по семантике «&»)

$\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$ (по семантике «$\to$» и соотношению $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$)

($\Leftarrow$) аналогично ▼

Равносильность формул

Утверждение. $\sim$ — **отношение эквивалентности**

Утверждение. **Если формула φ общезначима, то любая равносильная ей формула ψ также общезначима**

Утверждение. **Если формула φ выполнима, то любая равносильная ей формула ψ также выполнима**

Доказательство. Попробуйте самостоятельно

Основные равносильности

Законы булевой алгебры

Коммутативность & и $\vee$:

$$\varphi \,\&\, \psi \sim \psi \,\&\, \varphi \qquad\qquad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$$

Ассоциативность & и $\vee$:

$$(\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi \sim \varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi) \qquad\qquad (\varphi \vee \psi) \vee \chi \sim \varphi \vee (\psi \vee \chi)$$

Дистрибутивность $\vee$ относительно & и & относительно $\vee$:

$$\varphi \,\&\, (\psi \vee \chi) \sim \varphi \,\&\, \psi \vee \varphi \,\&\, \chi \qquad\qquad \varphi \vee (\psi \,\&\, \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \,\&\, (\varphi \vee \chi)$$

Идемпотентность & и $\vee$:

$$\varphi \,\&\, \varphi \sim \varphi \qquad\qquad \varphi \vee \varphi \sim \varphi$$

Инволютивность $\neg$:

$$\neg\neg\varphi \sim \varphi$$

Законы де Моргана для & и для $\vee$:

$$\neg(\varphi \,\&\, \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi \qquad\qquad \neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \,\&\, \neg\psi$$

Закон удаления импликации:

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$$

... ...

Основные равносильности

Правила работы с кванторами

Переименование связанной переменной:

$$\forall \mathtt{x}\ \varphi \sim \forall \mathtt{y}\ (\varphi\{\mathtt{x}/y\}) \qquad \exists \mathtt{x}\ \varphi \sim \exists \mathtt{y}\ (\varphi\{\mathtt{x}/y\})$$

(*если* $\mathtt{y} \notin \mathsf{Var}_\varphi$ *и подстановка* $\{\mathtt{x}/y\}$ *правильна для* φ)

Продвижение отрицания под квантор:

$$\neg\forall \mathtt{x}\ \varphi \sim \exists \mathtt{x}\ \neg\varphi \qquad \neg\exists \mathtt{x}\ \varphi \sim \forall \mathtt{x}\ \neg\varphi$$

Вынесение квантора за скобки:

$$\forall \mathtt{x}\ \varphi \,\&\, \psi \sim \forall \mathtt{x}\ (\varphi \,\&\, \psi) \qquad \exists \mathtt{x}\ \varphi \,\&\, \psi \sim \exists \mathtt{x}\ (\varphi \,\&\, \psi)$$

$$\forall \mathtt{x}\ \varphi \vee \psi \sim \forall \mathtt{x}\ (\varphi \vee \psi) \qquad \exists \mathtt{x}\ \varphi \vee \psi \sim \exists \mathtt{x}\ (\varphi \vee \psi)$$

(*если* $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_\psi$)

Строго говоря,
справедливость каждой упомянутой равносильности следует **обосновать**

Но эти обоснования устроено очень просто и однотипно, и потому здесь не приводятся: достаточно применить метод семантических таблиц

Теорема о равносильной замене

$\varphi[\![\psi]\!]$ — обозначение формулы φ, содержащей подформулу ψ

$\varphi[\![\psi/\chi]\!]$ — формула, получающаяся из φ
заменой некоторого (любого) числа вхождений подформулы ψ на χ

Теорема (о равносильной замене в ЛП)
Для любых формул φ, ψ, χ логики предикатов верно:

$$\psi \sim \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi[\![\psi]\!] \sim \varphi[\![\psi/\chi]\!]$$

Доказательство (индукцией по структуре формулы φ).

База индукции: $\varphi = \psi$ — очевидно ($\psi \sim \chi \Rightarrow \psi \sim \chi$ или $\psi \sim \psi$)

Индуктивный переход. Подробно разберём только один случай:

$$\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \forall \mathtt{x}\ (\varphi'[\![\psi]\!])$$

Остальные случаи аналогичны

Теорема о равносильной замене

Доказательство (индуктивный переход).
Утверждение: $\forall \mathtt{x}\ (\varphi'[\![\psi]\!]) \sim \forall \mathtt{x}\ (\varphi'[\![\psi/\chi]\!])$
Индуктивное предположение: $\varphi'[\![\psi]\!] \sim \varphi'[\![\psi/\chi]\!]$, то есть

для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любых предметов d, $\widetilde{d}^n$ верно:

$$\mathcal{I} \models (\varphi'[\![\psi]\!] \to \varphi'[\![\psi/\chi]\!])[\mathtt{x}/d, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\varphi'[\![\psi/\chi]\!] \to \varphi'[\![\psi]\!])[\mathtt{x}/d, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Тогда

$$\mathcal{I} \models \forall \mathtt{x}\ (\varphi'[\![\psi]\!] \to \varphi'[\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models \forall \mathtt{x}\ (\varphi'[\![\psi/\chi]\!] \to \varphi'[\![\psi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Из блока 11: $\models \forall \mathtt{x}\ (A \to B) \to (\forall \mathtt{x}\ A \to \forall \mathtt{x}\ B)$, а значит:

$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}\ \varphi'[\![\psi]\!] \to \forall \mathtt{x}\ \varphi'[\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}\ \varphi'[\![\psi/\chi]\!] \to \forall \mathtt{x}\ \varphi'[\![\psi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Но это и есть $\forall \mathtt{x}\ (\varphi'[\![\psi]\!]) \sim \forall \mathtt{x}\ (\varphi'[\![\psi/\chi]\!])$ ▼

Пример напоследок

Используя равносильную замену, можно существенно изменить форму высказывания, сохранив его смысл — (не)выполнимость в каждой интерпретации на каждом наборе предметов

Например,

$$\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x})$$

$$\sim \qquad (\exists \mathrm{x}\ \varphi \sim \exists \mathrm{y}\ (\varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}))$$

$$\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y})$$

$$\sim \qquad (\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y})$$

$$\sim \qquad (\neg\forall \mathrm{x}\ \varphi \sim \exists \mathrm{x}\ \neg\varphi)$$

$$\exists \mathrm{x}\ \neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y})$$

$$\sim \qquad (\exists \mathrm{x}\ \varphi \vee \psi \sim \exists \mathrm{x}\ (\varphi \vee \psi);\ \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi)$$

$$\exists \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

$$\sim \qquad (\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi)$$

$$\exists \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$