Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 30

Натуральное исчисление высказываний:
правило сечения,
правило полного перебора,
правило приведения к абсурду,
полнота

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

Утверждение о совмещении выводов в НИВ

Если в НИВ доказуемы секвенции $\sigma_1, \dots, \sigma_n$
и из множества $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ выводима секвенция σ,
то в НИВ доказуема и секвенция σ

Доказательство.

Рассмотрим доказательства $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ секвенций $\sigma_1, \dots, \sigma_n$,
вывод $\mathcal{D}$ секвенции σ из $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и последовательность секвенций $\mathcal{D}'$:

$$\mathcal{D}_1 \quad \dots \quad \mathcal{D}_n \quad \mathcal{D}$$

Каждая секвенция $\mathcal{D}_i$ — аксиома или получается по какому-либо правилу вывода из записанных ранее в $\mathcal{D}_i$

В части $\mathcal{D}$ всё устроено так же, и сверх этого в произвольных местах могут быть записаны секвенции $\sigma_1, \dots, \sigma_n$

При этом σ_i — последняя секвенция части $\mathcal{D}_i$,
а значит, является аксиомой или получается по какому-либо
правилу вывода из секвенций части $\mathcal{D}_i$

Следовательно, $\mathcal{D}_1 \dots \mathcal{D}_n \mathcal{D}$ — доказательство секвенции σ ▼

Правило сечения в НИВ (утверждение)

Если секвенции $\Gamma \vdash A_1$, ..., $\Gamma \vdash A_n$ и $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$ доказуемы в НИВ, то доказуема и секвенция $\Gamma \vdash B$

Доказательство.

Положим, что секвенции $\Gamma \vdash A_1$, ..., $\Gamma \vdash A_n$ и $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$ доказуемы

По правилу дедукции ($R^{+}_{\rightarrow}$) и доказуемости $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$, доказуема секвенция $\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$

По правилу монотонности, доказуема секвенция $\Gamma \vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots))$

По правилу отделения ($R^{-}_{\rightarrow}$), из множества секвенций

$$\{\Gamma \vdash A_1, \quad \ldots, \quad \Gamma \vdash A_n, \quad \Gamma \vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots))\}$$

выводима секвенция $\Gamma \vdash B$

По утверждению о совмещении выводов, доказуема секвенция $\Gamma \vdash B$ ▼

Правило сечения иногда включается в НИВ как семейство правил вывода

$$\frac{\Gamma \vdash A_1, \ldots, \Gamma \vdash A_n, \{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

(по одному для каждого натурального n)

Правило полного перебора в НИВ (утверждение)

Если секвенции $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ и $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$ доказуемы в НИВ, то доказуема и секвенция $\Gamma \vdash B$

Доказательство.

Положим, что секвенции $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ и $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$ доказуемы

По закону исключённого третьего,
доказуема секвенция $\Gamma \vdash A \vee \neg A$

По правилу разбора случаев $(R_{\vee}^{-})$, из множества секвенций
$$\{\Gamma \cup \{A\} \vdash B, \quad \Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B, \quad \Gamma \vdash A \vee \neg A\}$$
выводима секвенция $\Gamma \vdash B$

По утверждению о совмещении выводов,
доказуема секвенция $\Gamma \vdash B$ ▼

Правило полного перебора иногда включается в НИВ как правило вывода
$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B, \Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Правило приведения к абсурду в НИВ (утверждение)

Если секвенции $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$ доказуемы в НИВ,
то для любой формулы B доказуема и секвенция $\Gamma \vdash B$

Доказательство.

Положим, что секвенции $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$ доказуемы

По правилу монотонности,
доказуемы секвенции $\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash A$ и $\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash \neg A$

По правилу рассуждения от противного ($R_{\neg}^{+}$),
доказуема секвенция $\Gamma \vdash \neg\neg B$

По правилу снятия двойного отрицания ($R_{\neg}^{-}$),
доказуема секвенция $\Gamma \vdash B$ ▼

Правило приведения к абсурду
иногда включается в НИВ как правило вывода

$$R_a\colon \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

Это правило вывода будет использоваться в обосновании полноты НИВ

Лемма о выводе связок в НИВ

Для любых формул A, B в НИВ доказуемы следующие секвенции:

$$
\begin{array}{llll}
A, B \vdash A \mathbin{\&} B & \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A, \neg B \vdash \neg(A \to B) & \\
\neg A \vdash \neg(A \mathbin{\&} B) & A \vdash A \vee B & \neg A \vdash A \to B & A \vdash \neg\neg A \\
\neg B \vdash \neg(A \mathbin{\&} B) & B \vdash A \vee B & B \vdash A \to B &
\end{array}
$$

Доказательство.

$A, B \vdash A \mathbin{\&} B$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & A, B \vdash A \\
\mathfrak{A}: & A, B \vdash B \\
R^{+}_{\&}: & A, B \vdash A \mathbin{\&} B
\end{array}
$$

$A \vdash A \vee B$, $B \vdash A \vee B$ — аналогично

$\neg A \vdash \neg(A \mathbin{\&} B)$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg A, A \mathbin{\&} B \vdash \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg A, A \mathbin{\&} B \vdash A \mathbin{\&} B \\
R^{-}_{\&}: & \neg A, A \mathbin{\&} B \vdash A \\
R^{+}_{\neg}: & \neg A \vdash \neg(A \mathbin{\&} B)
\end{array}
$$

$\neg B \vdash \neg(A \mathbin{\&} B)$ — аналогично

Лемма о выводе связок в НИВ

Для любых формул A, B в НИВ доказуемы следующие секвенции:

$$A, B \vdash A \,\&\, B \qquad \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) \qquad A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$$

$$\neg A \vdash \neg(A \,\&\, B) \qquad A \vdash A \vee B \qquad \neg A \vdash A \to B \qquad A \vdash \neg\neg A$$

$$\neg B \vdash \neg(A \,\&\, B) \qquad B \vdash A \vee B \qquad B \vdash A \to B$$

Доказательство.

$A \vdash \neg\neg A$:

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{A}: & A, \neg A \vdash A \\ \mathfrak{A}: & A, \neg A \vdash \neg A \\ R^{+}_{\neg}: & A, \vdash \neg\neg A \end{array}$$

$B \vdash A \to B$:

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{A}: & B, A \vdash B \\ R^{+}_{\to}: & B \vdash A \to B \end{array}$$

Лемма о выводе связок в НИВ

Для любых формул A, B в НИВ доказуемы следующие секвенции:

$A, B \vdash A \,\&\, B$	$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$	$A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$	
$\neg A \vdash \neg(A \,\&\, B)$	$A \vdash A \vee B$	$\neg A \vdash A \to B$	$A \vdash \neg\neg A$
$\neg B \vdash \neg(A \,\&\, B)$	$B \vdash A \vee B$	$B \vdash A \to B$	

Доказательство.

$\neg A \vdash A \to B$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg A, A \vdash A \\
\mathfrak{A}: & \neg A, A \vdash \neg A \\
R_a: & \neg A, A \vdash B \\
R_{\to}^{+}: & \neg A \vdash A \to B
\end{array}
$$

$A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & A, \neg B, A \to B \vdash \neg B \\
\mathfrak{A}: & A, \neg B, A \to B \vdash A \\
\mathfrak{A}: & A, \neg B, A \to B \vdash A \to B \\
R_{\to}^{-}: & A, \neg B, A \to B \vdash B \\
R_{\neg}^{+}: & A, \neg B \vdash \neg(A \to B)
\end{array}
$$

Лемма о выводе связок в НИВ

Для любых формул A, B в НИВ доказуемы следующие секвенции:

$$
\begin{array}{llll}
A, B \vdash A \,\&\, B & \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A, \neg B \vdash \neg(A \to B) & \\
\neg A \vdash \neg(A \,\&\, B) & A \vdash A \vee B & \neg A \vdash A \to B & A \vdash \neg\neg A \\
\neg B \vdash \neg(A \,\&\, B) & B \vdash A \vee B & B \vdash A \to B &
\end{array}
$$

Доказательство.

$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg A, \neg B, A \vee B, A \vdash A \\
\mathfrak{A}: & \neg A, \neg B, A \vee B, B \vdash B \\
\mathfrak{A}: & \neg A, \neg B, A \vee B, B \vdash \neg B \\
R_a: & \neg A, \neg B, A \vee B, B \vdash A \\
\mathfrak{A}: & \neg A, \neg B, A \vee B, \vdash A \vee B \\
R_\vee^-: & \neg A, \neg B, A \vee B \vdash A \\
\mathfrak{A}: & \neg A, \neg B, A \vee B \vdash \neg A \\
R_\neg^+: & \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)
\end{array}
$$

▼

Основная лемма (для обоснования полноты НИВ)

Для любой формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ и любой интерпретации $\mathcal{I}$ в НИВ доказуема секвенция $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \ldots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \varphi^{\mathcal{I}(\varphi)}$

$\varphi^{\mathbb{t}} = \varphi$; $\quad \varphi^{\mathbb{f}} = \neg\varphi$;

$\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — формула, содержащая **только** переменные $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$

Доказательство (индукцией по структуре формулы).

База индукции: $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \ldots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash x_i^{\mathcal{I}(x_i)}$ — это аксиома исчисления

Индуктивный шаг: подробно разберём только случай $\varphi = \psi \,\&\, \chi$ (остальные случаи аналогичны)

По лемме о выводе связок и правилу монотонности, доказуемо $\psi^{\mathcal{I}(\psi)}, \chi^{\mathcal{I}(\chi)} \vdash (\psi \,\&\, \chi)^{\mathcal{I}(\varphi)}$

По предположению индукции, доказуемо $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \ldots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \psi^{\mathcal{I}(\psi)}$ и $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \ldots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \chi^{\mathcal{I}(\chi)}$

По правилу сечения, доказуемо и $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \ldots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \varphi^{\mathcal{I}(\varphi)}$ ▼

Теорема о полноте НИВ

Любая общезначимая формула ЛВ доказуема в НИВ

Доказательство.

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

По основной лемме,
для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}^n$ доказуема секвенция

$$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash \varphi$$

По правилу полного перебора, доказуемы и все секвенции

- $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash \varphi$
- $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_{n-2}^{\alpha_{n-2}} \vdash \varphi$
- $\ldots$
- $x_1^{\alpha_1} \vdash \varphi$
- $\vdash \varphi$ ▼