Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 30

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

Натуральное исчисление предикатов:
основные определения,
корректность

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Вступление

Попробуем доказать такое утверждение:

Утверждение. Если все целые чи́сла обладают свойством P,
то существует целое число, обладающее свойством P

Доказательство. Рассмотрим произвольное целое число x

Так как все чи́сла обладают свойством P,
то и x обладает свойством P

Так как рассматриваемое целое число x обладает свойством P,
то существует целое число, обладающее свойством P ▼

В *НИВ* нет правил, позволяющих
"рассмотреть произвольный предмет x",
и в языке логики высказываний нет средств записи фраз
"для любого предмета" и "существует предмет"

Для таких доказательств, как в примере,
лучше подходит язык *логики предикатов*

Натуральное исчисление предикатов (НИП)

Попробуем модифицировать и расширить НИВ
до натурального исчисления предикатов (НИП)
так, чтобы оно подходило для “полноценного” доказательства
общезначимости формул логики предикатов

Словом “формула” теперь будем обозначать
формулы логики предикатов

Понятие *секвенции* оставим без изменений:
это запись $\Gamma \vdash A$, где A — формула и Γ — множество формул

Объявим такие секвенции формулами НИП

Множество аксиом оставим без изменений:
это все секвенции, порождаемые схемой $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$

НИП: правила вывода

Включим в НИП 14 правил вывода:

- Все 10 правил НИВ
  (*с формулами логики предикатов вместо логики высказываний*)
- 4 новых правила для введения и удаления кванторов

В новых правилах будут использоваться следующие параметры:

- A, B — формулы
- Γ — множество формул
- $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ — предметные переменные
- t — терм

Для каждого правила также будут описаны **ограничения**, связывающие между собой допустимые значения разных параметров

НИП: правила вывода

Правило удаления всеобщности (правило перехода к частному):

$$R_{\forall}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \forall \mathtt{x}\ A}{\Gamma \vdash A\{\mathtt{x}/t\}}$$

Ограничение: подстановка $\{\mathtt{x}/t\}$ *правильна* для A

Содержательная трактовка:
Если A верно для любого предмета,
то, в частности, A верно и для предмета, отвечающего терму t

Напоминание о правильности подстановок:

- Подстановка правильна $\Leftrightarrow$ все вхождения всех переменных подставляемых термов t оказываются свободными в A
- О том, чем "плохо" применение неправильных подстановок, говорилось в *блоке 9* ("существует тот, кто сам себе дед"); по тем же причинам запрещено выбирать неправильные подстановки и в этом правиле

НИП: правила вывода

Правило введения существования:

$$R^{+}_{\exists}\colon\ \frac{\Gamma \vdash A\{\mathrm{x}/t\}}{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\ A}$$

Ограничение: подстановка $\{\mathrm{x}/t\}$ *правильна* для A

Содержательная трактовка:
Если A верно для предмета, отвечающего терму t,
то существует предмет, для которого верно A

Ограничение правильности подстановки
вытекает из тех же соображений, что и для правила $R^{-}_{\forall}$

НИП: правила вывода

Правило введения всеобщности (правило обобщения):

$$R_{\forall}^{+}: \ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\ A}$$

Ограничение: x не является свободной переменной формул из Γ

Содержательная трактовка:

- Рассмотрим произвольный предмет x
- Известно, что *для этого произвольного предмета* x верно A
- Следовательно, A верно для любого предмета x

“Произвольность” предмета x отражена в **ограничении**:

- Если в Γ содержится формула φ со свободной переменной x, то, согласно содержательной трактовке секвенции $\Gamma \vdash A$, среди текущих используемых предположений есть такое: “предмет x обладает свойством φ”, а значит, x не произволен
- Иначе нет ни одного текущего предположения, ограничивающего свободу выбора x

НИП: правила вывода

Правило удаления существования

$$R_{\exists}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\, A,\ \Gamma \cup \{A\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Ограничения:

- Подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ правильна для A
- y не является свободной переменной формул из $\Gamma \cup \{\exists \mathrm{x}\, A,\ B\}$

Это правило вывода — самое сложное для понимания во всём исчислении, но при этом повсеместно использующееся в “естественных” доказательствах:

- Известно, что существует предмет, для которого верно A
- Обозначим этот существующий предмет символом y
- Получив возможность указывать на предмет y, покажем, что верно утверждение B, не зависящее от того, какое именно имя y было выбрано
- Тогда B действительно верно

НИП: правила вывода

$$R_{\exists}^{-}\colon \frac{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\, A, \Gamma \cup \{A\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Ограничения:

- Подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ правильна для A
- y не является свободной переменной формул из $\Gamma \cup \{\exists \mathrm{x}\, A,\ B\}$

Ограничения вытекают из следующих соображений:

- Всё, что известно про y — это то, что для него верно A,
  а в остальном y *произволен*
  - поэтому переменная y не свободна в $\Gamma \cup \{\exists \mathrm{x}\, A\}$
- Если в B содержится свободная переменная y,
  то от предположения “для этого y верно A” избавиться нельзя,
  а если не содержится, то можно
  - поэтому переменная y не свободна в B

НИП: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

Правильный вывод:

1. Посмотрим внимательно на второе утверждение:
$$\mathfrak{A}\colon\ \varphi_1, \varphi_2 \vdash \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$
2. Обозначим этого прилежного студента переменной "**Вася**", и посмотрим внимательно на факт его прилежности:
$$\mathfrak{A}\colon\ \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася})$$

НИП: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

Правильный вывод:

3. Раз все прилежные студенты сдадут этот курс,
то и условленный **Вася** сдаст, если он прилежен:
$$R_{\forall}^{-}: \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \to \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R_{\to}^{-}: \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

НИП: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

Правильный вывод:

5. Раз условленный **Вася** сдаст этот курс, то хотя бы один студент сдаст этот курс:
$$R_\exists^+ \colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Pass}(\mathtt{x})$$
6. Итог: хотя бы один студент сдаст этот курс:
$$R_\exists^- \colon \varphi_1, \varphi_2 \vdash \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Pass}(\mathtt{x})$$

НИП: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

***Не**правильный вывод:* ...

4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R^{-}_{\to}\colon\ \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$
5. Итог: студент с именем "**Вася**" сдаст этот курс:
$$\cancel{R^{-}_{\exists}}\colon\ \varphi_1, \varphi_2 \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

Содержательно, на самом деле **Васи** не существует:
это условность, про которую в исходных данных ничего не сказано,
и он никак не связан с реальными Васями

Строго, правило $R^{-}_{\exists}$ применено ошибочно:
в правой части секвенции 4 содержится свободная переменная "**Вася**"

НИП: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$

- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

***Не**правильный вывод:* ...

4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R^{-}_{\to}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

5. Так как "**Вася**" — переменная,
на его место можно поставить любого студента:
$$\cancel{R^{+}_{\forall}}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \forall\textbf{Вася}\ \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

6. Значит, кто угодно сдаст этот курс:
$$R^{-}_{\exists}\colon \varphi_1, \varphi_2 \vdash \forall\textbf{Вася}\ \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

НИП: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

***Не**правильный вывод:* ...

4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R^{-}_{\to}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$
5. Так как “**Вася**” — переменная,
на его место можно поставить любого студента:
$$\cancel{R^{+}_{\forall}}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \forall\textbf{Вася}\ \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

Содержательно, **Вася** — произвольный **прилежный** студент,
а неприлежные не справятся с ролью **Васи**

Строго: правило $R^{+}_{\forall}$ применено ошибочно:
в левой части секвенции 4 содержится свободная переменная **Вася**

НИП: корректность

Теорема(*о корректности НИП*)
Если секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП,
то формула φ общезначима

Общая схема доказательства остаётся точно такой же,
как и для *теоремы о корректности НИВ*

Для правил, содержащихся в НИВ,
доказательство переносится *почти* дословно
(*с поправкой на наличие свободных переменных в формулах*)

А для четырёх новых правил
можете попробовать предложить обоснование самостоятельно