# Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 26

Древесный волновой алгоритм

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2023/2024, весенний семестр

Это децентрализованный волновой алгоритм, предназначенный для топологии дерева с хотя бы двумя узлами

- или для любой топологии, в которой распределённо задано такое дерево, содержащее все узлы
- т.е. остовное дерево

Считается, что каждый узел $p$ знает множество всех своих соседей ($Neigh_p$)

Инициаторами являются все листья

- (каждый узел может легко проверить, лист ли он: $|Neigh_p| \stackrel{?}{=} 1$)

Общая схема древесного алгоритма ($\mathcal{A}$):

1. Каждый лист отправляет фишку (единственному) соседу
2. Внутренний узел,
   2.1 приняв фишки от всех соседей, кроме одного, отправляет фишку оставшемуся, и
   2.2 приняв фишку от оставшегося соседа, принимает решение

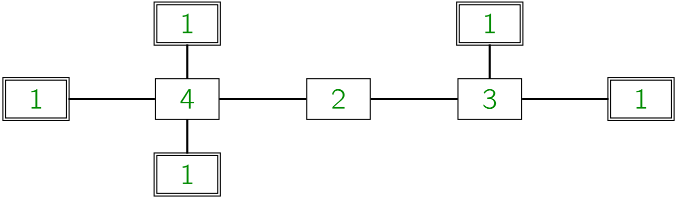
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



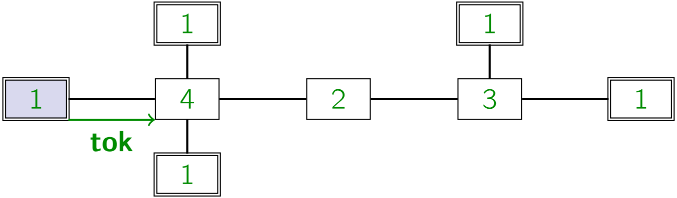
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



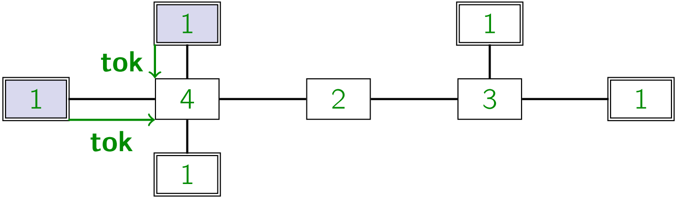
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\mathbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



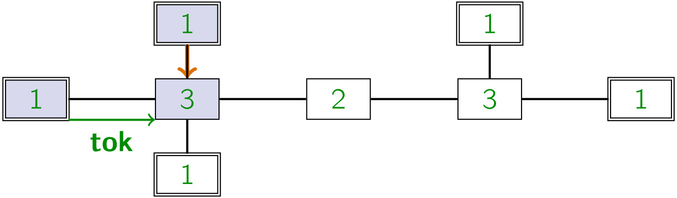
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



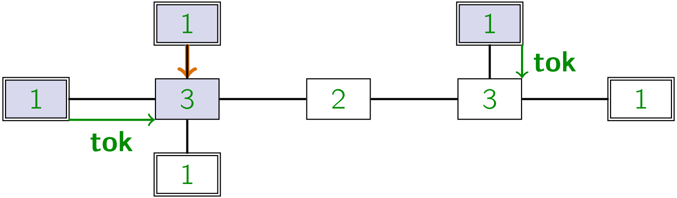
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



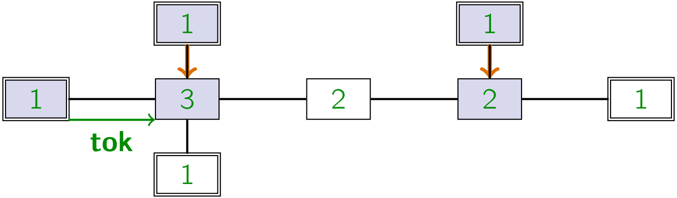
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



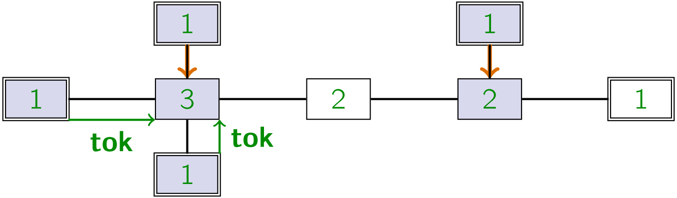
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



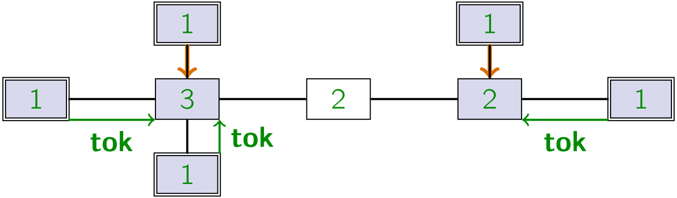
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\mathbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



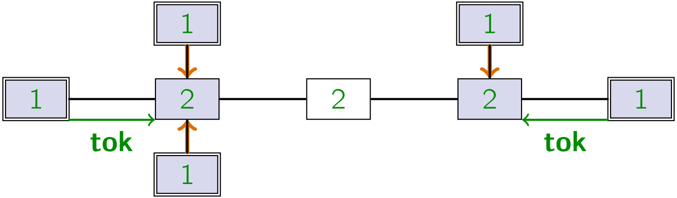
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\mathbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



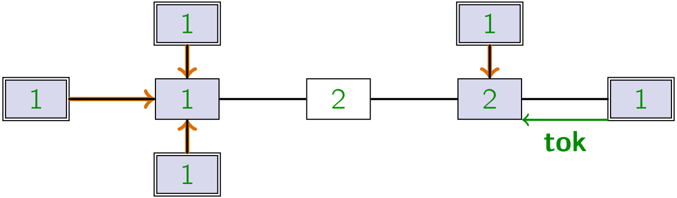
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. $\mathrm{decide}$

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



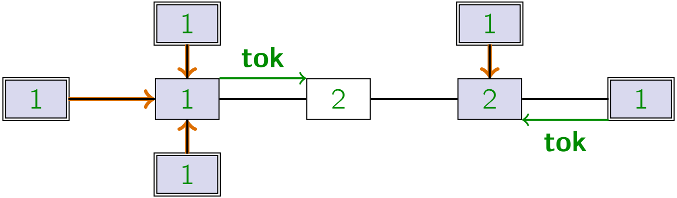
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\mathbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



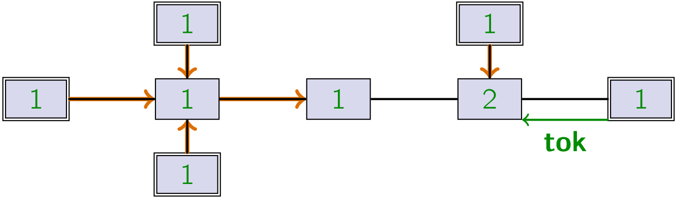
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. $\mathrm{decide}$

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



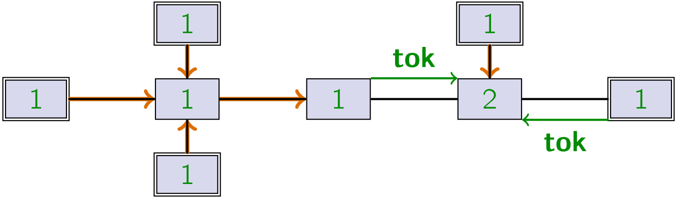
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\mathbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



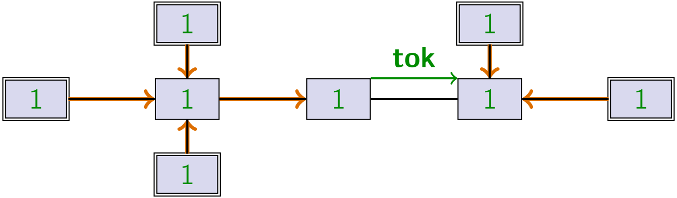
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



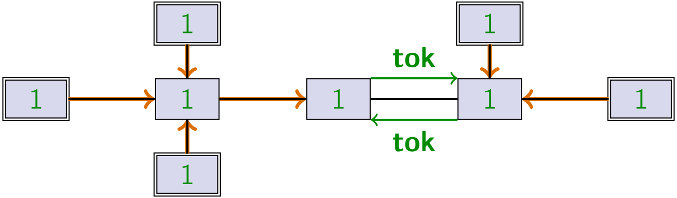
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



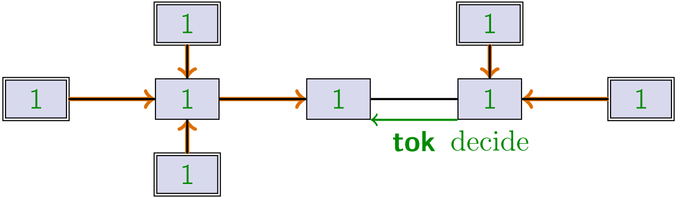
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\mathbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\mathbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



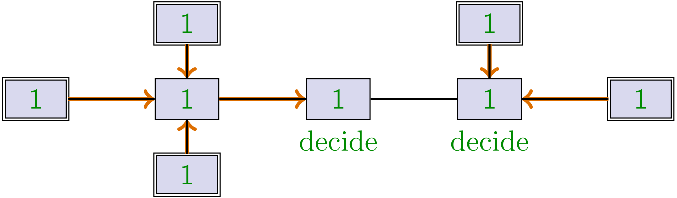
Код узла $p$ (и инициатора, и последователя):

- Переменная $X_p : 2^{Neigh_p}$, начальное значение $Neigh_p$

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. decide

Здесь считается, что последователь выполняет проверку (1) одновременно с приёмом (1.1)

**Пример** выполнения древесного алгоритма



**Утверждение (уникальность отправителя).** **В любом вычислении алгоритма $\mathcal{A}$ каждый узел отправляет не более одной фишки**

Доказательство. Согласно коду, фишка отправляется только в (3) и только один раз ▼

1. Пока $|X_p| > 1$:
   1.1 $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$ для любого $q \in X$
   1.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Пусть $X_p = \{q\}$
3. $\mathrm{send}_q(\textbf{tok})$
4. $\mathrm{receive}_q(\textbf{tok})$
5. decide

Далее будем полагать, что:

- Действие (1) - это проверка условия $|X_p| > 1$
- (1.1) и (1.2) - это одно действие (1.X)
- В действии (4) дополнительно выполняется присваивание $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
  - Это присваивание влияет только на вид состояния узла $p$ после выполнения (4) и не влияет на «глобальные» свойства алгоритма

**Утверждение (смысл $X_p$). В любой достижимой конфигурации любой р.с. алгоритма $\mathcal{A}$ значение $X_p$ — это множество всех соседей, от которых $p$ не принял ни одной фишки**

Доказательство.

Пусть $\mathcal{N}_p$ — множество всех соседей, от которых $p$ не принял ни одной фишки

В начальной конфигурации $X_p = Neigh_p = \mathcal{N}_p$

Действия (1.X) и (4) удаляют заданный узел $q$ одновременно

- из $\mathcal{N}_p$ (принимается фишка от $q$)
- и из $X_p$ (это присваивание прописано явно)

Остальные действия не изменяют ни $\mathcal{N}_p$, ни $X_p$ ▼

**Утверждение (завершаемость). Все вычисления любой р.с. алгоритма $\mathcal{A}$ конечны**

Доказательство.

(2)–(5) — это очевидно конечный набор действий

Значит, достаточно показать, что (1) и (1.X) для любого узла $p$ выполняются конечное число раз

(1) выполняется на 1 раз больше, чем (1.X)

Если в вычислении отправляется суммарно $N < (|Neigh_p| - 1)$ фишек, адресованных $p$, то (1.X) выполняется $N$ раз

Иначе значение $|X_p|$

- после каждого выполнения (1.X) строго уменьшается (согласно уникальности отправителя и смыслу $X_p$) и
- не может стать меньше 1 (согласно (1), (1.2) и выбору топологии),

и остаётся только применить теорему о проверке живости для функции нормировки $|X_p|$ и целевого множества всех тупиковых конфигураций ▼

Пусть дерево топологии имеет вид $T = (V, E)$

**Утверждение (суммарный размер $X_p$). В любой достижимой конфигурации любой р.с. алгоритма $\mathcal{A}$ верно равенство $\sum\limits_{p \in V} |X_p| = 2|E| - K$, где $K$ — суммарное число принятых фишек**

Доказательство.

Согласно смыслу $X_p$ и уникальности отправителя, если $K_p$ — число фишек, принятых узлом $p$, то $|Neigh_p| = |X_p| + K_p$

Если просуммировать это равенство по всем $p \in V$ и применить известный факт о том, что сумма степеней вершин графа есть дважды число рёбер, то получится равенство $2|E| = \sum\limits_{p \in V} |X_p| + \sum\limits_{p \in V} K_p$

При этом $\sum\limits_{p \in V} K_p = K$, откуда следует равенство из условия ▼

**Утверждение (чистота каналов).** **В любой достижимой заключительной конфигурации любой р.с. алгоритма $\mathcal{A}$ в коммуникационной подсистеме не содержится ни одной фишки**

Доказательство.

Согласно уникальности отправителя, каждый узел отправляет не более одной фишки в каждый канал

Согласно (1.1) и (4), если каждый из соседей узла $p$ отправляет ему не более одной фишки, то $p$ принимает все эти фишки ▼

**Утверждение (принятие решения). В любом вычислении любой р.с. алгоритма $\mathcal{A}$ хотя бы раз принимается решение**

Доказательство. *Предположим от противного*, что это не так: есть топология и вычисление для неё, такие что ни один узел в этом вычислении не принимает решение

Согласно завершаемости, рассматриваемое вычисление конечно

По устройству кода, в последней (тупиковой) конфигурации $\gamma$ этого вычисления ни один узел не выполнил (4) — иначе он выполнил бы и (5)

Согласно смыслу $X_p$, тогда в $\gamma$ для каждого узла $p$ верно $|X_p| \geq 1$

По суммарному размеру $X_p$, в $\gamma$ верно равенство $\sum\limits_{p \in V} |X_p| = 2|E| - K$

Согласно чистоте каналов, $K$ — это суммарное число не только принятых, но и отправленных фишек

Согласно уникальности отправителя, тогда $(|V| - K)$ узлов в $\gamma$ не отправили ни одной фишки

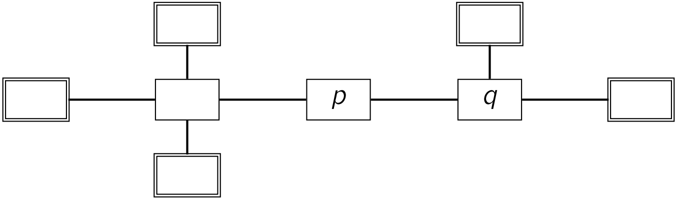
По устройству (1) и (3), для этих узлов $q$ в $\gamma$ верно $|X_q| \geq 2$

Значит, $2|E| - K = \sum\limits_{p \in V} |X_p| \geq |V| + (|V| - K) = 2|V| - K$

Следовательно, $|E| \geq |V|$, что *противоречит* определению дерева ▼

Зададим дерево $T_{pq} = (V_{pq}, E_{pq})$ как компоненту связности узла $p$ после удаления ребра $(p, q)$ из дерева топологии

**Например:**




$T_{pq}$ — это поддерево, состоящее из пяти левых вершин и соединяющих их рёбер

$T_{qp}$ — это поддерево, состоящее из трёх правых вершин и соединяющих их рёбер

**Утверждение (причинность в $T_{pq}$). Для любого события $\alpha$ отправки фишки узлом $p$ узлу $q$ в любом вычислении любой р.с. алгоритма $\mathcal{A}$ и для любого узла $r$ дерева $T_{pq}$ в последовательности событий этого вычисления содержится событие $\beta$ узла $r$, такое что $\beta \preceq \alpha$**

Доказательство (индукцией).

*База:* если $p$ — лист, то $V_{pq} = \{p\}$ и можно взять $\beta = \alpha$

*Индуктивный переход:*

Если $p$ не лист, то по устройству кода и смыслу $X_p$ он отправляет фишку $p \to q$ (3) только после приёма фишек от каждого своего соседа $r$, кроме $q$

По *предположению индукции*, для отправки (3) фишки соседом $r$, связанной с этим приёмом, в каждом узле из $T_{rp}$ происходит нестрогая причина этой отправки

При этом $V_{pq} = (\bigcup\limits_{r \in Neigh_p \setminus \{q\}} V_{rp}) \cup \{p\}$

Значит, по свойствам отношения $\preceq$, для действия (3) узла $p$ в каждом узле из $V_{pq}$ происходит нестрогая причина этого действия ▼

**Утверждение (полнота покрытия). В любом вычислении любой р.с. алгоритма $\mathcal{A}$ любое событие $\mathrm{decide}$ является нестрогим следствием хотя бы одного события каждого узла**

Доказательство.

По устройству кода, действие $\mathrm{decide}$ (5), выполненное узлом $q$, является следствием приёма сообщений (1.X), (4) от каждого его соседа $p$

По определению $\prec$, причинами этих приёмов являются отправки соседями $p$ сообщений узлу $q$

По причинности в $T_{pq}$ и свойствам $\preceq$, в каждом узле дерева $T_{pq}$ для каждого соседа $p$ узла $q$ содержится причина действия (5) узла $q$

При этом $\left(\bigcup\limits_{p \in Neigh_q} V_{pq}\right) \cup \{q\} = V$ ▼

**Теорема. Алгоритм $\mathcal{A}$ является волновым алгоримом**

Доказательство. Ранее были доказаны свойства завершаемости, принятия решения и полноты покрытия для $\mathcal{A}$ ▼

**Д.з. 1.** Докажите, что в древесном волновом алгоритме решение всегда принимают ровно две вершины