Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 24

Волновые алгоритмы:
основные определения и свойства

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, весенний семестр

Вступление, допущения

При разработке распределённых алгоритмов иногда возникает необходимость в решении вспомогательных задач, основанных на широковещательном распространении информации — например:

- Отправка данных всем узлам сети
- Синхронизация всех узлов сети
- Вычисление значения функции на входных данных, распределённых между узлами

Было бы неплохо для решения таких задач уметь применять общие методы рассылки сообщений, гарантирующие задействование всех узлов

Волновые алгоритмы: основные определения

Волновым алгоритмом называется распределённый алгоритм, каждая с.п. S которого удовлетворяет следующим требованиям:

1. **Завершаемость**: все вычисления S конечны
2. **Принятие решения**:
   - В узле p может содержаться действие принятия решения
     - Будем обозначать это действие командой decide
     - Это действие будем считать равносильным присваиванию значения $\mathbb{t}$ в булеву переменную $decided_p$ узла p с начальным значением $\mathbb{f}$, отмечающую, принял ли узел решение
   - В каждом вычислении S хотя бы раз выполняется decide
3. **Полнота покрытия**: в любом вычислении S каждое событие decide является нестрогим следствием хотя бы одного события каждого узла

Волновые алгоритмы: основные определения

Вычисление волного алгоритма называется волной

Узлы волнового алгоритма обычно разбиваются на два класса (имеют одну из двух ролей):

1. Инициатор (по-другому — стартовый узел) запускает волну своим действием
   Первое действие инициатора — это внутреннее действие или отправка сообщения
2. Неинициатор (по-другому — последователь) вовлекается в волну, не запуская её самостоятельно
   Первое действие последователя — это приём сообщения

Как правило, в описании волнового алгоритма предлагается два вида кода (описания поведения узлов), один для каждого инициатора и другой для каждого последователя

Волновые алгоритмы: основные определения

Волновые алгоритмы делятся на

- централизованные: содержащие ровно один узел-инициатор — и
- децентрализованные: допускающие и более одного инициатора

Волновой алгоритм может быть рассчитан

- как на принятие решение одним (выделенным или любым) узлом,
- так и на принятие решения многими узлами (например, всеми)

При обсуждении волновых алгоритмов будут использоваться такие допущения не по умолчанию:

- Топология является связной
  - Иначе действия узлов из разных компонент связности параллельны, и корректно принять решение невозможно
- У узлов есть имена, и каждый узел p знает множество имён своих соседей: $Neigh_p$

Волновые алгоритмы: основные свойства

Далее считаем заданным р.с. $\mathcal{S}$ волнового алгоритма с с.п. S и топологией $\Gamma = (V, E)$

Кроме того, будем использовать следующие обозначения:

- $\mathfrak{I}$ — множество всех инициаторов
- $\mathfrak{A}_{\mathcal{S}}$ — множество всех действий $\mathcal{S}$
- $\mathfrak{A}_p$ — множество всех действий узла p
- $\mathfrak{p}(\alpha)$ — узел, которому принадлежит действие α ($\alpha \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}(\alpha)}$)
- $\vec{\mathfrak{A}}_\pi = \mathfrak{Act}(\pi, \mathcal{S})$
- $\mathfrak{A}_\Pi$ — множество всех последовательностей $\vec{\mathfrak{A}}_\pi$ для вычислений π р.с. $\mathcal{S}$
- $\mathcal{D}$ — множество всех действий принятия решения
- $\mathfrak{A}^!$ — множество всех действий отправки

Волновые алгоритмы: основные свойства

Утверждение

Среди нестрогих причин любого события любой волны есть хотя бы одно действие какого-либо инициатора

$$(\forall \vec{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}_\Pi : \forall \alpha \in \vec{\mathfrak{A}} : \exists p \in \mathfrak{I} : \exists \alpha_0 \in \mathfrak{A}_p : \alpha_0 \preceq \alpha)$$

Доказательство. Рассмотрим $\vec{\mathfrak{A}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathfrak{A}_\Pi$ и действие α_i

По свойствам отношения $\preceq$ верно следующее:

- Множество $\mathfrak{R}$ нестрогих причин действия α_i конечно
- В $\mathfrak{R}$ содержится элемент α_0, минимальный относительно $\preceq$
- α_0 — первое действие узла $\mathfrak{p}(\alpha_0)$
- α_0 — внутреннее действие или действие отправки

Следовательно, узел $\mathfrak{p}(\alpha_0)$ — инициатор ▼

Волновые алгоритмы: основные свойства

$\mathfrak{par}(p, \vec{\mathfrak{A}})$ — так для последователя p будет обозначаться узел, отправляющий первое сообщение, принимаемое узлом p в вычислении с последовательностью действий $\vec{\mathfrak{A}}$

Утверждение. **Для любой волны π любого централизованного волнового алгоритма граф $T = (V, E_T)$, где $E_T = \{(p, \mathfrak{par}(p, \vec{\mathfrak{A}}_\pi)) \mid p \in V \setminus V_0\})$, является остовным деревом графа (V, E), корнем (стоком) которого является инициатор**

Доказательство.

По определению централизованного волнового алгоритма, каждый узел, кроме единственного инициатора, получает хотя бы одно сообщение в волне π

Следовательно, по заданию T,

- верно $|E_T| = |V| - 1$ и
- из инициатора не исходит ни одной дуги в T

Осталось показать, что в T нет циклов

Волновые алгоритмы: основные свойства

$\mathfrak{par}(p, \vec{\mathfrak{A}})$ — так для последователя p будет обозначаться узел, отправляющий первое сообщение, принимаемое узлом p в вычислении с последовательностью действий $\vec{\mathfrak{A}}$

Утверждение. **Для любой волны π любого централизованного волнового алгоритма граф $T = (V, E_T)$, где $E_T = \{(p, \mathfrak{par}(p, \vec{\mathfrak{A}}_\pi)) \mid p \in V \setminus V_0\}$, является остовным деревом графа (V, E), корнем (стоком) которого является инициатор**

Доказательство.

Предположим от противного, что в T содержится цикл $v_1 \leftarrow v_2 \leftarrow \ldots \leftarrow v_k \leftarrow v_1$, состоящий из последователей

Тогда, по определению и свойствам отношения $\prec$,

- для первых действий $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ узлов $v_1, \ldots, v_k$ соответственно в π верно $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \cdots \prec \alpha_k \prec \alpha_1$
- $\alpha_1 \prec \alpha_1$, *что невозможно* ▼

Волновые алгоритмы: основные свойства

Утверждение. **Среди причин любого события принятия решения любой волны содержится хотя бы одно событие отправки сообщения каждого другого узла**

$$(\forall \vec{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}_{\Pi} : \forall \alpha^d \in \mathcal{D} : \forall p \in V \setminus \{\mathfrak{p}(\alpha^d)\} : \exists \alpha^! \in \mathfrak{A}_p : \alpha^! \prec \alpha^d)$$

Доказательство. Пусть $\vec{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}_{\Pi}$, $\alpha^d \in D$, $p \in V$ и $p \neq \mathfrak{p}(\alpha^d)$

Если в Γ содержится ровно один узел, то утверждение очевидно верно

Далее полагаем, что в Γ содержится хотя бы два узла

По определению волнового алгоритма, существует событие $\alpha \in \mathfrak{A}_p$, такое что $\alpha \preceq \alpha^d$

Выберем последнее такое событие α в $\vec{\mathfrak{A}}$

По определению $\prec$, существует последовательность событий $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m = \alpha^d$, такая что каждая пара соседних событий — это либо либо события одного узла, либо взаимосвязанные события отправки и приёма

По выбору α, $\alpha = \alpha_1 \in \mathfrak{A}_p$ и $\alpha_2 \notin \mathfrak{A}_p$

Это возможно только в том случае, если α — событие отправки ▼

Волновые алгоритмы: основные свойства

Следствие. В любой волне отправляется не менее $(|V| - 1)$ сообщений

Утверждение. В любой волне с одним инициатором, принимающим решение, отправляется не менее $|V|$ сообщений

Доказательство.

По последнему доказанному утверждению, принятию решения инициатором предшествует отправка сообщения во всех последователях — это $(|V| - 1)$ отправок сообщений

По первому доказанному утверждению, самой ранней отправке сообщения последователем предшествует действие инициатора

Рассуждая так же, как и в доказательстве предыдущего утверждения, можно убедиться, что среди причин самой ранней отправки сообщения последователем есть отправка сообщения инициатором

Значит, в волне, подходящей под условие, содержится по крайней мере $(|V| - 1 + 1) = |V|$ отправок ▼

Волновые алгоритмы: основные свойства

Утверждение. В любой волне волнового алгоритма для произвольной связной топологии, узлы которого не используют информацию о топологии и об отличительных особенностях каких-либо из соседей, отправляется не менее $|E|$ сообщений

Доказательство. *Предположим от противного*, что существует волна π, в которой отправляется менее $|E|$ сообщений

Тогда существует канал $(p - q)$, в который в π не отправляются сообщения

Заменим этот канал на два, добавив в середину последователя x:

$$p - q \quad \mapsto \quad p - x - q$$

По условию, начальные состояния узлов p и q не изменяются при добавлении x

Значит, существует волна π', в которой выполняются все те же действия, что и до добавления x, в каналы $p - x$ и $x - q$ не отправляется ни одно сообщение и x не выполняет ни одного действия в π', что *противоречит* определению волнового алгоритма ▼