

Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 24

Волновые алгоритмы:
основные определения и свойства

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Вступление, допущения

При разработке распределённых алгоритмов иногда возникает необходимость в решении вспомогательных задач, основанных на широкоэмитальном распространении информации — например:

- ▶ Отправка данных всем узлам сети
- ▶ Синхронизация всех узлов сети
- ▶ Вычисление значения функции на входных данных, распределённых между узлами

Было бы неплохо для решения таких задач уметь применять общие методы рассылки сообщений, гарантирующие задействование всех узлов

Волновые алгоритмы: основные определения

Волновым алгоритмом называется распределённый алгоритм, каждая с.п. S которого удовлетворяет следующим требованиям:

1. **Завершаемость**: все вычисления S конечны
2. **Принятие решения**:
 - ▶ В узле p может содержаться действие **принятия решения**
 - ▶ Будем обозначать это действие командой **decide**
 - ▶ Это действие будем считать равносильным присваиванию значения \mathfrak{t} в булеву переменную **decided_p** узла p с начальным значением \mathfrak{f} , отмечающую, принял ли узел решение
 - ▶ В каждом вычислении S хотя бы раз выполняется **decide**
3. **Полнота покрытия**: в любом вычислении S каждое событие **decide** является **нестрогим следствием** хотя бы одного события каждого узла

Волновые алгоритмы: основные определения

Вычисление волного алгоритма называется **волной**

Узлы волнового алгоритма обычно разбиваются на два класса (имеют одну из двух **ролей**):

1. **Инициатор** (по-другому — **стартовый** узел) запускает волну своим действием
Первое действие инициатора — это внутреннее действие или отправка сообщения
2. **Неинициатор** (по-другому — **последователь**) вовлекается в волну, не запуская её самостоятельно
Первое действие последователя — это приём сообщения

Как правило, в описании волнового алгоритма предлагается два вида кода (описания поведения узлов), один для каждого инициатора и другой для каждого последователя

Волновые алгоритмы: основные определения

Волновые алгоритмы делятся на

- ▶ **централизованные**: содержащие ровно один узел-инициатор — и
- ▶ **децентрализованные**: допускающие и более одного инициатора

Волновой алгоритм может быть рассчитан

- ▶ как на принятие решение одним (выделенным или любым) узлом,
- ▶ так и на принятие решения многими узлами (например, всеми)

При обсуждении волновых алгоритмов будут использоваться такие **допущения не по умолчанию**:

- ▶ Топология является связной
 - ▶ Иначе действия узлов из разных компонент связности параллельны, и корректно принять решение невозможно
- ▶ У узлов есть имена, и каждый узел p знает множество имён своих соседей: $Neigh_p$

Волновые алгоритмы: основные свойства

Далее считаем заданным р.с. \mathcal{S} волнового алгоритма с с.п. S и топологией $\Gamma = (V, E)$

Кроме того, будем использовать следующие обозначения:

- ▶ \mathcal{I} — множество всех инициаторов
- ▶ $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ — множество всех действий \mathcal{S}
- ▶ \mathcal{A}_p — множество всех действий узла p
- ▶ $p(\alpha)$ — узел, которому принадлежит действие α ($\alpha \in \mathcal{A}_{p(\alpha)}$)
- ▶ $\vec{\mathcal{A}}_{\pi} = \text{Act}(\pi, \mathcal{S})$
- ▶ \mathcal{A}_{Π} — множество всех последовательностей $\vec{\mathcal{A}}_{\pi}$ для вычислений π р.с. \mathcal{S}
- ▶ \mathcal{D} — множество всех действий принятия решения
- ▶ $\mathcal{A}^!$ — множество всех действий отправки

Волновые алгоритмы: основные свойства

Утверждение

Среди нестрогих причин любого события любой волны есть хотя бы одно действие какого-либо инициатора

$$(\forall \vec{\alpha} \in \mathfrak{A}_\Pi : \forall \alpha \in \vec{\alpha} : \exists p \in \mathfrak{I} : \exists \alpha_0 \in \mathfrak{A}_p : \alpha_0 \preceq \alpha)$$

Доказательство. Рассмотрим $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathfrak{A}_\Pi$ и действие α_i

По **свойствам отношения** \preceq верно следующее:

- ▶ Множество \mathfrak{K} нестрогих причин действия α_i конечно
- ▶ В \mathfrak{K} содержится элемент α_0 , минимальный относительно \preceq
- ▶ α_0 — первое действие узла $p(\alpha_0)$
- ▶ α_0 — внутреннее действие или действие отправки

Следовательно, узел $p(\alpha_0)$ — инициатор ▼

Волновые алгоритмы: основные свойства

$\text{par}(p, \vec{\mathcal{A}})$ — так для последователя p будет обозначаться узел, отправляющий первое сообщение, принимаемое узлом p в вычислении с последовательностью действий $\vec{\mathcal{A}}$

Утверждение. Для любой волны π любого централизованного волнового алгоритма граф $T = (V, E_T)$, где $E_T = \{(p, \text{par}(p, \vec{\mathcal{A}}_\pi)) \mid p \in V \setminus V_0\}$, является остовным деревом графа (V, E) , корнем (стоком) которого является инициатор

Доказательство.

По определению централизованного волнового алгоритма, каждый узел, кроме единственного инициатора, получает хотя бы одно сообщение в волне π

Следовательно, по заданию T ,

- ▶ верно $|E_T| = |V| - 1$ и
- ▶ из инициатора не исходит ни одной дуги в T

Осталось показать, что в T нет циклов

Волновые алгоритмы: основные свойства

$\text{par}(p, \vec{\mathcal{A}})$ — так для последователя p будет обозначаться узел, отправляющий первое сообщение, принимаемое узлом p в вычислении с последовательностью действий $\vec{\mathcal{A}}$

Утверждение. Для любой волны π любого централизованного волнового алгоритма граф $T = (V, E_T)$, где $E_T = \{(p, \text{par}(p, \vec{\mathcal{A}}_\pi)) \mid p \in V \setminus V_0\}$, является остовным деревом графа (V, E) , корнем (стоком) которого является инициатор

Доказательство.

Предположим от противного, что в T содержится цикл $v_1 \leftarrow v_2 \leftarrow \dots \leftarrow v_k \leftarrow v_1$, состоящий из последователей

Тогда, по определению и свойствам отношения \prec ,

- ▶ для первых действий $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ узлов v_1, \dots, v_k соответственно в π верно $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \dots \prec \alpha_k \prec \alpha_1$
- ▶ $\alpha_1 \prec \alpha_1$, что невозможно ▼

Волновые алгоритмы: основные свойства

Утверждение. Среди причин любого события принятия решения любой волны содержится хотя бы одно событие отправки сообщения каждого другого узла

$$(\forall \vec{\alpha} \in \mathfrak{A}_\Pi : \forall \alpha^d \in \mathcal{D} : \forall p \in V \setminus \{p(\alpha^d)\} : \exists \alpha^! \in \mathfrak{A}_p : \alpha^! \prec \alpha^d)$$

Доказательство. Пусть $\vec{\alpha} \in \mathfrak{A}_\Pi$, $\alpha^d \in \mathcal{D}$, $p \in V$ и $p \neq p(\alpha^d)$

Если в Γ содержится ровно один узел, то утверждение очевидно верно

Далее полагаем, что в Γ содержится хотя бы два узла

По определению волнового алгоритма, существует событие $\alpha \in \mathfrak{A}_p$, такое что $\alpha \preceq \alpha^d$

Выберем последнее такое событие α в $\vec{\alpha}$

По определению \prec , существует последовательность событий $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m = \alpha^d$, такая что каждая пара соседних событий — это либо события одного узла, либо взаимосвязанные события отправки и приёма

По выбору α , $\alpha = \alpha_1 \in \mathfrak{A}_p$ и $\alpha_2 \notin \mathfrak{A}_p$

Это возможно только в том случае, если α — событие отправки ▼

Волновые алгоритмы: основные свойства

Следствие. В любой волне отправляется не менее $(|V| - 1)$ сообщений

Утверждение. В любой волне с одним инициатором, принимающим решение, отправляется не менее $|V|$ сообщений

Доказательство.

По **последнему доказанному утверждению**, принятию решения инициатором предшествует отправка сообщения во всех последователях — это $(|V| - 1)$ отправок сообщений

По **первому доказанному утверждению**, самой ранней отправке сообщения последователем предшествует действие инициатора

Рассуждая так же, как и в **доказательстве предыдущего утверждения**, можно убедиться, что среди причин самой ранней отправки сообщения последователем есть отправка сообщения инициатором

Значит, в волне, подходящей под условие, содержится по крайней мере $(|V| - 1 + 1) = |V|$ отправок ▼

Волновые алгоритмы: основные свойства

Утверждение. В любой волне волнового алгоритма для произвольной связной топологии, узлы которого не используют информацию о топологии и об отличительных особенностях каких-либо из соседей, отправляется не менее $|E|$ сообщений

Доказательство. *Предположим от противного*, что существует волна π , в которой отправляется менее $|E|$ сообщений

Тогда существует канал $(p - q)$, в который в π не отправляются сообщения

Заменим этот канал на два, добавив в середину последователя x :

$$p - q \quad \mapsto \quad p - x - q$$

По **условию**, начальные состояния узлов p и q не изменяются при добавлении x

Значит, существует волна π' , в которой выполняются все те же действия, что и до добавления x , в каналы $p - x$ и $x - q$ не отправляется ни одно сообщение и x не выполняет ни одного действия в π' , что *противоречит* определению волнового алгоритма ▼