

# Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

## Блок 24

Волновые алгоритмы:  
основные определения и свойства

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

## Вступление, допущения

При разработке распределённых алгоритмов иногда возникает необходимость в решении вспомогательных задач, основанных на широкоэмитательном распространении информации — например:

- ▶ Отправка данных всем узлам сети
- ▶ Синхронизация всех узлов сети
- ▶ Вычисление значения функции на входных данных, распределённых между узлами

Было бы неплохо для решения таких задач уметь применять общие методы рассылки сообщений, гарантирующие задействование всех узлов

# Волновые алгоритмы: основные определения

**Волновым алгоритмом** называется распределённый алгоритм, каждая с.п.  $S$  которого удовлетворяет следующим требованиям:

1. **Завершаемость**: все вычисления  $S$  конечны

2. **Принятие решения**:

▶ В узле  $p$  может содержаться действие **принятия решения**

▶ Будем обозначать это действие командой **decide**

▶ Это действие будем считать равносильным присваиванию значения  $\mathfrak{t}$  в булеву переменную **decided<sub>p</sub>** узла  $p$  с начальным значением  $\mathfrak{f}$ , отмечающую, принял ли узел решение

▶ В каждом вычислении  $S$  хотя бы раз выполняется **decide**

3. **Полнота покрытия**: в любом вычислении  $S$  каждое событие **decide** является **нестрогим следствием** хотя бы одного события каждого узла

# Волновые алгоритмы: основные определения

Вычисление волного алгоритма называется **волной**

Узлы волнового алгоритма обычно разбиваются на два класса (имеют одну из двух **ролей**):

1. **Инициатор** (по-другому — **стартовый** узел) запускает волну своим действием  
Первое действие инициатора — это внутреннее действие или отправка сообщения
2. **Неинициатор** (по-другому — **последователь**) вовлекается в волну, не запуская её самостоятельно  
Первое действие последователя — это приём сообщения

Как правило, в описании волнового алгоритма предлагается два вида кода (описания поведения узлов), один для каждого инициатора и другой для каждого последователя

# Волновые алгоритмы: основные определения

Волновые алгоритмы делятся на

- ▶ **централизованные**: содержащие ровно один узел-инициатор — и
- ▶ **децентрализованные**: допускающие и более одного инициатора

Волновой алгоритм может быть рассчитан

- ▶ как на принятие решение одним (выделенным или любым) узлом,
- ▶ так и на принятие решения многими узлами (например, всеми)

При обсуждении волновых алгоритмов будут использоваться такие **допущения не по умолчанию**:

- ▶ Топология является связной
  - ▶ Иначе действия узлов из разных компонент связности параллельны, и корректно принять решение невозможно
- ▶ У узлов есть имена, и каждый узел  $p$  знает множество имён своих соседей:  $Neigh_p$

# Волновые алгоритмы: основные свойства

Далее считаем заданным р.с.  $\mathcal{S}$  волнового алгоритма с с.п.  $S$  и топологией  $\Gamma = (V, E)$

Кроме того, будем использовать следующие обозначения:

- ▶  $\mathcal{I}$  — множество всех инициаторов
- ▶  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$  — множество всех действий  $\mathcal{S}$
- ▶  $\mathcal{A}_p$  — множество всех действий узла  $p$
- ▶  $p(\alpha)$  — узел, которому принадлежит действие  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathcal{A}_{p(\alpha)}$ )
- ▶  $\vec{\mathcal{A}}_{\pi} = \text{Act}(\pi, \mathcal{S})$
- ▶  $\mathcal{A}_{\Pi}$  — множество всех последовательностей  $\vec{\mathcal{A}}_{\pi}$  для вычислений  $\pi$  р.с.  $\mathcal{S}$
- ▶  $\mathcal{D}$  — множество всех действий принятия решения
- ▶  $\mathcal{A}^!$  — множество всех действий отправки

# Волновые алгоритмы: основные свойства

## Утверждение

Среди нестрогих причин любого события любой волны есть хотя бы одно действие какого-либо инициатора

$$(\forall \vec{\alpha} \in \mathfrak{A}_\Pi : \forall \alpha \in \vec{\alpha} : \exists p \in V_0 : \exists \alpha_0 \in \mathfrak{A}_p : \alpha_0 \preceq \alpha)$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathfrak{A}_\Pi$  и действие  $\alpha_i$

По **свойствам отношения**  $\preceq$  верно следующее:

- ▶ Множество  $\mathfrak{R}$  нестрогих причин действия  $\alpha_i$  конечно
- ▶ В  $\mathfrak{R}$  содержится элемент  $\alpha_0$ , минимальный относительно  $\preceq$
- ▶  $\alpha_0$  — первое действие узла  $p(\alpha_0)$
- ▶  $\alpha_0$  — внутреннее действие или действие отправки

Следовательно, узел  $p(\alpha_0)$  — инициатор ▼

## Волновые алгоритмы: основные свойства

$\text{par}(p, \vec{\mathcal{A}})$  — так для последователя  $p$  будет обозначаться узел, отправляющий первое сообщение, принимаемое узлом  $p$  в вычислении с последовательностью действий  $\vec{\mathcal{A}}$

**Утверждение.** Для любой волны  $\pi$  любого централизованного волнового алгоритма граф  $T = (V, E_T)$ , где  $E_T = \{(p, \text{par}(p, \vec{\mathcal{A}}_\pi)) \mid p \in V \setminus V_0\}$ , является остовным деревом графа  $(V, E)$ , корнем (стоком) которого является инициатор

Доказательство.

По определению централизованного волнового алгоритма, каждый узел, кроме единственного инициатора, получает хотя бы одно сообщение в волне  $\pi$

Следовательно, по заданию  $T$ ,

- ▶ верно  $|E_T| = |V| - 1$  и
- ▶ из инициатора не исходит ни одной дуги в  $T$

Осталось показать, что в  $T$  нет циклов



## Волновые алгоритмы: основные свойства

$\text{par}(p, \vec{\mathcal{A}})$  — так для последователя  $p$  будет обозначаться узел, отправляющий первое сообщение, принимаемое узлом  $p$  в вычислении с последовательностью действий  $\vec{\mathcal{A}}$

**Утверждение.** Для любой волны  $\pi$  любого централизованного волнового алгоритма граф  $T = (V, E_T)$ , где  $E_T = \{(p, \text{par}(p, \vec{\mathcal{A}}_\pi)) \mid p \in V \setminus V_0\}$ , является остовным деревом графа  $(V, E)$ , корнем (стоком) которого является инициатор

Доказательство.

Предположим от противного, что в  $T$  содержится цикл  $v_1 \leftarrow v_2 \leftarrow \dots \leftarrow v_k \leftarrow v_1$ , состоящий из последователей

Тогда, по определению и свойствам отношения  $\prec$ ,

- ▶ для первых действий  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  узлов  $v_1, \dots, v_k$  соответственно в  $\pi$  верно  $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \dots \prec \alpha_k \prec \alpha_1$
- ▶  $\alpha_1 \prec \alpha_1$ , что невозможно ▼

# Волновые алгоритмы: основные свойства

**Утверждение.** Среди причин любого события принятия решения любой волны содержится хотя бы одно событие отправки сообщения каждого другого узла

$$(\forall \vec{\alpha} \in \mathfrak{A}_\Pi : \forall \alpha^d \in \mathcal{D} : \forall p \in V \setminus \{p(\alpha^d)\} : \exists \alpha^! \in \mathfrak{A}_p : \alpha^! \prec \alpha^d)$$

**Доказательство.** Пусть  $\vec{\alpha} \in \mathfrak{A}_\Pi$ ,  $\alpha^d \in \mathcal{D}$ ,  $p \in V$  и  $p \neq p(\alpha^d)$

Если в  $\Gamma$  содержится ровно один узел, то утверждение очевидно верно

Далее полагаем, что в  $\Gamma$  содержится хотя бы два узла

По определению волнового алгоритма, существует событие  $\alpha \in \mathfrak{A}_p$ , такое что  $\alpha \preceq \alpha^d$

Выберем последнее такое событие  $\alpha$  в  $\vec{\alpha}$

По определению  $\prec$ , существует последовательность событий  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m = \alpha^d$ , такая что каждая пара соседних событий — это либо события одного узла, либо взаимосвязанные события отправки и приёма

По выбору  $\alpha$ ,  $\alpha = \alpha_1 \in \mathfrak{A}_p$  и  $\alpha_2 \notin \mathfrak{A}_p$

Это возможно только в том случае, если  $\alpha$  — событие отправки ▼

## Волновые алгоритмы: основные свойства

**Следствие.** В любой волне отправляется не менее  $(|V| - 1)$  сообщений

**Утверждение.** В любой волне с одним инициатором, принимающим решение, отправляется не менее  $|V|$  сообщений

**Доказательство.**

По **последнему доказанному утверждению**, принятию решения инициатором предшествует отправка сообщения во всех последователях — это  $(|V| - 1)$  отправок сообщений

По **первому доказанному утверждению**, самой ранней отправке сообщения последователем предшествует действие инициатора

Рассуждая так же, как и в **доказательстве предыдущего утверждения**, можно убедиться, что среди причин самой ранней отправки сообщения последователем есть отправка сообщения инициатором

Значит, в волне, подходящей под условие, содержится по крайней мере  $(|V| - 1 + 1) = |V|$  отправок ▼

# Волновые алгоритмы: основные свойства

**Утверждение.** В любой волне волнового алгоритма для произвольной связной топологии, узлы которого не используют информацию о топологии и об отличительных особенностях каких-либо из соседей, отправляется не менее  $|E|$  сообщений

*Доказательство.* *Предположим от противного*, что существует волна  $\pi$ , в которой отправляется менее  $|E|$  сообщений

Тогда существует канал  $(p - q)$ , в который в  $\pi$  не отправляются сообщения

Заменим этот канал на два, добавив в середину последователя  $x$ :

$$p - q \quad \mapsto \quad p - x - q$$

По **условию**, начальные состояния узлов  $p$  и  $q$  не изменяются при добавлении  $x$

Значит, существует волна  $\pi'$ , в которой выполняются все те же действия, что и до добавления  $x$ , в каналы  $p - x$  и  $x - q$  не отправляется ни одно сообщение и  $x$  не выполняет ни одного действия в  $\pi'$ , что *противоречит* определению волнового алгоритма ▼