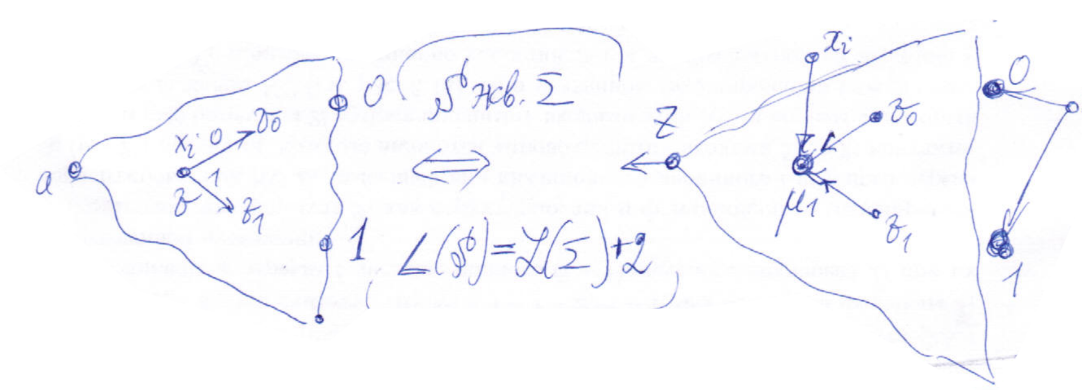
# Курс «Элементы теории дискретных управляющих систем» (ВМК МГУ, 3 курс, 318 гр. — кафедра МК).

## Семинар №3
## IV. Верхние оценки функций Шеннона

**Задача №1**

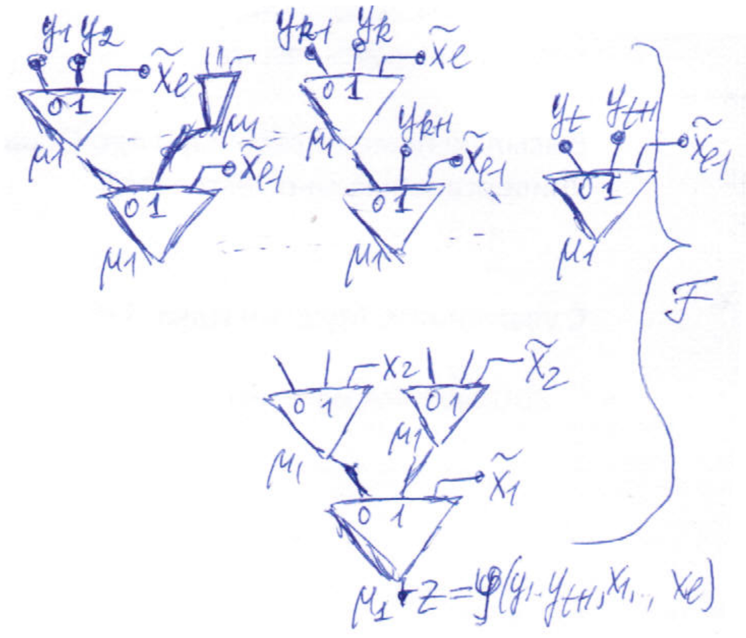
Получить верхнюю оценку функции Шеннона $L^{\mathrm{BDD}}(n)$, асимптотически совпадающую с нижней оценкой вида $L^{\mathrm{BDD}}(n) \gtrsim 2^n/n$.

*Решение.* Класс $\mathfrak{U}^{\mathrm{BDD}} \approx \mathfrak{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}_\mu}$, где $\text{Б}_\mu = \{\mu_1(x, y_0, y_1), 0, 1\}$, причём БП $x_1$ — «прямая» БП, которая может присоединяться только к входам схемы, а $y_0$, $y_1$ — «итеративные» БП, по которым осуществляется суперпозиция. Моделирование: $\Sigma \in \mathfrak{U}^{\mathrm{BDD}} \leftrightarrow S \in \widetilde{\mathfrak{U}}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}_\mu}$.




Таким образом, $\widetilde{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}_\mu}(n) + 2 \geqslant L^{\mathrm{BDD}}(n)$. Докажем, что $\widetilde{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}_\mu}(n) \lesssim 2^n/n$, и, следовательно, $L^{\mathrm{BDD}}(n) \lesssim 2^n/n$, то есть $L^{\mathrm{BDD}}(n) \sim 2^n/n$.

1. Выберем в качестве основного блока формулу $\mathcal{F}$, которая имеет вид квазиполного двоичного дерева, построенного из $t$ ФЭ $\mu_1$, соединённых через входы $y_0$, $y_1$. Заметим, что число ярусов (глубина) формулы $\mathcal{F}$ равно $l = \lceil \log_2(t+1) \rceil$ и что она реализует существенную ФАЛ $\varphi = \varphi(y_1, \ldots, y_{t+1}, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_l)$.




2. Положим $p = (t+1) = \lceil 2^m/s \rceil$ и построим разбиение куба $B^m$ вида $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$ на последовательные отрезки длины $s$. Дополним это разбиение до разбиения $\widehat{\Pi} = (\widehat{\pi}_1, \ldots, \widehat{\pi}_{p+l})$, где $\widehat{\Pi}_i = \pi_i$, при $i = 1, \ldots, p$, и $\widehat{\pi}_i = \varnothing$ при $i > p$. Построим на основе разбиения $\widehat{\Pi}$ $\varphi$-УМ $G$ порядка $m$, которое имеет вид

$G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(p)} \cup G^{(p+1)} \cup \ldots \cup G^{(p+l)}$, где $|G^{(i)}| \leqslant 2^s$, если $i = 1, \ldots, p$, и $|G^{(i)}| = 1$, т. е. $|G^{(i)}| = \{g^{(i)}\}$, если $i = p+1, \ldots, l$.

3. Построим схему $\Sigma_f$, $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}_\mu}$, которая реализует произвольную ФАЛ $f$, $f \in P_2(n)$, аналогично тому, как строилась соответствующая КС в утв. 6.4 и СФЭ в утв. 5.1. При этом: а) $q = m + l, x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$; б) $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ — разбиение куба $B^q$, построенное по утв. 6.1 при $a = 1$ (как в курсе Основы кибернетики) для системы ФАЛ $g = (g^{(p+1)}, \ldots, g^{(p+l)})$; в) при моделировании ФАЛ $g^{(p+i)}$ на компоненте $\delta_j$ буквой $x_{m+i}$ БП $\tilde{x}_i$ в формуле $\mathcal{F}$ заменяется на БП $x_{m+i}$ и, кроме того, в случае $\sigma = 0$ входы 0 и 1 ФЭ $\mu_1$ $i$-го яруса формулы $\mathcal{F}$ меняются местами.

Сложность построенной таким образом СФЭ $\Sigma_f$ удовлетворяет неравенству $L(\Sigma_f) \lesssim 2^{n-1}/n$.

**Задача №2**

Доказать, что $\widetilde{L}^{\Phi}_{\text{Б}'_0}(n) \lesssim 2^{n-1}/\log_2 n$ (см. зад. 3 сем. 2).

*Решение.* Будем опираться на конструкцию, использованную для синтеза формул в произвольном базисе (утв. 6.2 — теорема 5.2), и возьмём в качестве основного блока формулу вида $(y_1 \vee y_{t+1}) \cdot \ldots \cdot (y_t \vee y_{2t}) = \psi(y_1, \ldots, y_{2t})$, построив соответствующее $\psi$-УМ $G$ порядка $m$.

При этом, как обычно, положим: а) $q = m + a\lambda$, $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$; б) $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ — разбиение куба $B^q$, построенное для $\overrightarrow{G}$ по утв. 6.2 (лемма 5.2).

Остальные построения соответствуют утв. 6.3 (теорема 5.1) с той лишь разницей, что для «хорошей» компоненты разбиения $\Delta$ сложность основного блока равна $(t-1)$. Следовательно, $\widetilde{L}^{\Phi}_{\text{Б}'_0}(n) \lesssim 2^{n-1}/\log_2 n$, откуда $\widetilde{L}^{\Phi}_{\text{Б}'_0}(n) \sim 2^{n-1}/\log_2 n$.

**Задача для самостоятельного решения №1**

Установить асимптотику функции Шеннона для домашней задачи №2 семинара 2.