Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 28

Натуральное исчисление высказываний:
основные определения

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Вступление

Логические исчисления, *в числе прочего*,
применяются для формализации и анализа доказательств,
записанных на естественном языке, и для этого, как правило,

- выбираются как можно более простые «самоочевидные» аксиомы, и чем меньше аксиом, тем лучше
- в правилах вывода записываются основные способы построения «естественных» математических доказательств
- исчисление в целом устраивается так, чтобы доказуемость и доказательство формулы соответствовали доказуемости и доказательству утверждения, выраженного этой формулой, в «обычном» понимании

Исчисления такого вида принято называть

натуральными исчислениями

Для начала обсудим натуральное исчисление высказываний (НИВ),
предназначенное для доказательства общезначимости
формул логики высказываний

НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Вспомним пример, с которого начинался блок 27:

Теорема. Если все мурыки бюкают, а я не бюкаю, то я не мурыка.

Чтобы избежать ненужных технических выкладок и вписать этот пример в рамки логики высказываний, немного его упростим:

Теорема.
Если я, будучи мурыкой, непременно бы бюкал, и я мурыка, то я бюкаю.

Пусть $\mathtt{x}$ = «я мурыка» и $\mathtt{y}$ = «я бюкаю»

Тогда последняя теорема переписывается так:

Теорема. $(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x} \to \mathtt{y}$

НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Теорема. $(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x} \to \mathtt{y}$

Доказательство.
Пусть верно утверждение «$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$».
Тогда верно и «$\mathtt{x} \to \mathtt{y}$», и «$\mathtt{x}$».
Так как верно «$\mathtt{x} \to \mathtt{y}$» и «$\mathtt{x}$», верно и «$\mathtt{y}$».
Это следствие получено в контексте посылки «$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$»,
а значит, верно «$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x} \to \mathtt{y}$».

Перепишем это доказательство так, чтобы было видно, про какие формулы и в каких предположениях утверждается, что они верны:

Строка	Предположения	Что верно
2	$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$	$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$
3	$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$	$\mathtt{x} \to \mathtt{y}$
3	$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$	$\mathtt{x}$
4	$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$	$\mathtt{y}$
6		$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x} \to \mathtt{y}$

НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Множество формул Γ, предполагающихся верными,
и формула φ, утверждающаяся верной в этих предположениях,
в НИВ записываются в виде секвенции

$$\Gamma \vdash \varphi$$

В секвенции $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\} \vdash \varphi$ иногда будем опускать фигурные скобки:

$$\psi_1, \ldots, \psi_k \vdash \varphi$$

Предположения	Что верно	Соответствующая секвенция
$(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$	$(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$	$(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \vdash (\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$
$(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$	$\mathrm{x} \to \mathrm{y}$	$(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \vdash \mathrm{x} \to \mathrm{y}$
$(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$	x	$(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \vdash \mathrm{x}$
$(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$	y	$(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \vdash \mathrm{y}$
	$(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \to \mathrm{y}$	$\vdash (\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \to \mathrm{y}$

Формулами НИВ объявим всевозможные секвенции

Чтобы не путать формулы ЛВ и формулы НИВ,
будем для формул НИВ **всегда** использовать термин «секвенция»

Будем говорить, что формула φ доказуема в натуральном исчислении,
если доказуема секвенция $\vdash \varphi$

НИВ: аксиомы

Семейство всех аксиом НИВ зададим одной схемой аксиом $\mathfrak{A}$:

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$$

В этой схеме используются два параметра:

- A — произвольная формула
- Γ — произвольное множество формул

Содержательное прочтение схемы $\mathfrak{A}$:

Любое текущее предположение считается верным без доказательства

НИВ: правила вывода

В НИВ будут включены 10 правил вывода

В описании этих правил будут использоваться следующие параметры:

- A и B — произвольные формулы
- Γ — произвольное множество формул

Чтобы лучше понимать, почему правила вывода устроены именно так, а не по-иному, следует иметь в виду две их трактовки:

- Техническая трактовка: правила устроены так, чтобы можно было с их помощью **добавлять** (**вводить**) логические операции в формулу правой части секвенции и **удалять** операции из неё
- Содержательная трактовка: в правилах отражены основные принципы построения доказательств, основанные на использовании слов «и», «или», «не» и «если .., то ..» («из .. следует ..»)

НИВ: правила вывода

Правило введения конъюнкции:

$$R^{+}_{\&}: \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}$$

Содержательная трактовка:
Если (*в предположениях* Γ) верно «A» и «B», то верно «A и B»

Правила удаления конъюнкции:

$$R^{-}_{\&}: \qquad \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash B}$$

Содержательная трактовка:
Если верно «A и B», то верно «A»
Если верно «A и B», то верно «B»

НИВ: правила вывода

Правило введения импликации (правило дедукции):

$$R^{+}_{\to}: \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Содержательная трактовка:
Если в предположении «A» верно «B»,
то верно утверждение «из A следует B»

Правило удаления импликации (правило отделения; modus ponens):

$$R^{-}_{\to}: \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

Содержательная трактовка:
Если верно «A» и верно утверждение «из A следует B», то верно «B»

НИВ: правила вывода

Правила введения дизъюнкции:

$$R_{\vee}^{+}: \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Содержательная трактовка:

Если верно «A», то верно «A или что угодно»

Если верно «B», то верно «что угодно или B»

Правило удаления дизъюнкции (правило разбора случаев):

$$R_{\vee}^{-}: \quad \frac{\Gamma \vdash A \vee B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash C,\ \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Содержательная трактовка:

Если

- верно «A или B»,
- в предположении «A» верно «C» и
- в предположении «B» верно «C»,

то верно «C»

НИВ: правила вывода

Правило введения отрицания (правило рассуждения от противного):

$$R_{\neg}^{+}: \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Содержательная трактовка:
Если в предположении «A» что-то («B») и верно, и неверно,
то «A» неверно (то есть верно «не A»)

Правило удаления отрицания (правило снятия двойного отрицания):

$$R_{\neg}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Содержательная трактовка:
Если утверждение «неверно A» неверно, то «A» верно

А куда подевались другие полезные законы и правила?