# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 28

Натуральное исчисление высказываний:
основные определения

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

# Вступление

Логические исчисления, *в числе прочего*,
применяются для формализации и анализа доказательств,
записанных на естественном языке, и для этого, как правило,

- выбираются как можно более простые «самоочевидные» аксиомы, и чем меньше аксиом, тем лучше
- в правилах вывода записываются основные способы построения «естественных» математических доказательств
- исчисление в целом устраивается так, чтобы доказуемость и доказательство формулы соответствовали справедливости утверждения, выраженного этой формулой, и доказательству этого утверждения на естественном языке

Исчисления такого вида принято называть

**натуральными исчислениями**

Для начала обсудим натуральное исчисление высказываний (НИВ),
предназначенное для доказательства общезначимости
формул логики высказываний

# НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Вспомним пример, с которого начинался блок 27:

Теорема. Если все мурыки бюкают, а я не бюкаю, то я не мурыка.

Чтобы избежать ненужных технических выкладок и вписать этот пример в рамки логики высказываний, немного его упростим:

Теорема.
Если я, будучи мурыкой, непременно бы бюкал, и я мурыка, то я бюкаю.

Пусть $\mathtt{x}$ = «я мурыка» и $\mathtt{y}$ = «я бюкаю»

Тогда последняя теорема переписывается так:

Теорема. $(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x} \to \mathtt{y}$

# НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Теорема. $(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x} \to \mathtt{y}$

Доказательство.
Пусть верно утверждение «$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$».
Тогда верно и «$\mathtt{x} \to \mathtt{y}$», и «$\mathtt{x}$».
Так как верно «$\mathtt{x} \to \mathtt{y}$» и «$\mathtt{x}$», верно и «$\mathtt{y}$».
Это следствие получено в контексте посылки «$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$»,
а значит, верно «$(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x} \to \mathtt{y}$».

Перепишем это доказательство так, чтобы было видно, про какие формулы и в каких предположениях утверждается, что они верны:

| Строка | Предположения | Что верно |
|---|---|---|
| 2 | $(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$ | $(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$ |
| 3 | $(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$ | $\mathtt{x} \to \mathtt{y}$ |
| 3 | $(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$ | $\mathtt{x}$ |
| 4 | $(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x}$ | $\mathtt{y}$ |
| 6 | | $(\mathtt{x} \to \mathtt{y}) \,\&\, \mathtt{x} \to \mathtt{y}$ |

# НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Множество формул Г, предполагающихся верными,
и формула $\varphi$, утверждающаяся верной в этих предположениях,
в НИВ записываются в виде секвенции

$$\Gamma \vdash \varphi$$

В секвенции $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\} \vdash \varphi$ иногда будем опускать фигурные скобки:

$$\psi_1, \ldots, \psi_k \vdash \varphi$$

| Предположения | Что верно | Соответствующая секвенция |
|---|---|---|
| $(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$ | $(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$ | $(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \vdash (\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$ |
| $(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$ | $\mathrm{x} \to \mathrm{y}$ | $(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \vdash \mathrm{x} \to \mathrm{y}$ |
| $(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$ | $\mathrm{x}$ | $(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \vdash \mathrm{x}$ |
| $(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x}$ | $\mathrm{y}$ | $(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \vdash \mathrm{y}$ |
| | $(\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \to \mathrm{y}$ | $\vdash (\mathrm{x} \to \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{x} \to \mathrm{y}$ |

Формулами НИВ объявим всевозможные секвенции

Чтобы не путать формулы ЛВ и формулы НИВ,
будем для формул НИВ **всегда** использовать термин «секвенция»

Будем говорить, что формула $\varphi$ доказуема в натуральном исчислении,
если доказуема секвенция $\vdash \varphi$

# НИВ: аксиомы

Семейство всех аксиом НИВ зададим одной схемой аксиом $\mathfrak{A}$:

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$$

В этой схеме используются два параметра:

- $A$ — произвольная формула
- $\Gamma$ — произвольное множество формул

Содержательное прочтение схемы $\mathfrak{A}$:

Любое текущее предположение считается верным без доказательства

# НИВ: правила вывода

В НИВ будут включены 10 правил вывода

В описании этих правил будут использоваться следующие параметры:

- $A$ и $B$ — произвольные формулы
- $\Gamma$ — произвольное множество формул

Чтобы лучше понимать, почему правила вывода устроены именно так, а не по-иному, следует иметь в виду две их трактовки:

- Техническая трактовка: правила устроены так, чтобы можно было с их помощью **добавлять** (**вводить**) логические операции в формулу правой части секвенции и **удалять** операции из неё
- Содержательная трактовка: в правилах отражены основные принципы построения доказательств, основанные на использовании слов «и», «или», «не» и «если .., то ..» («из .. следует ..»)

# НИВ: правила вывода

**Правило введения конъюнкции**:

$$R^{+}_{\&}: \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}$$

Содержательная трактовка:
Если (*в предположениях* $\Gamma$) верно «$A$» и «$B$», то верно «$A$ и $B$»

**Правила удаления конъюнкции**:

$$R^{-}_{\&}: \qquad \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash B}$$

Содержательная трактовка:
Если верно «$A$ и $B$», то верно «$A$»
Если верно «$A$ и $B$», то верно «$B$»

# НИВ: правила вывода

**Правило введения импликации** (правило дедукции):

$$R^{+}_{\to}: \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Содержательная трактовка:
Если в предположении «$A$» верно «$B$»,
то верно утверждение «из $A$ следует $B$»

**Правило удаления импликации** (правило отделения; modus ponens):

$$R^{-}_{\to}: \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

Содержательная трактовка:
Если верно «$A$» и верно утверждение «из $A$ следует $B$», то верно «$B$»

# НИВ: правила вывода

**Правила введения дизъюнкции**:

$$R_{\vee}^{+}: \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Содержательная трактовка:

Если верно «$A$», то верно «$A$ или что угодно»

Если верно «$B$», то верно «что угодно или $B$»

**Правило удаления дизъюнкции** (правило разбора случаев):

$$R_{\vee}^{-}: \quad \frac{\Gamma \vdash A \vee B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash C,\ \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Содержательная трактовка:

Если

- верно «$A$ или $B$»,
- в предположении «$A$» верно «$C$» и
- в предположении «$B$» верно «$C$»,

то верно «$C$»

# НИВ: правила вывода

**Правило введения отрицания** (правило рассуждения от противного):

$$R_{\neg}^{+}: \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Содержательная трактовка:
Если в предположении «$A$» что-то («$B$») и верно, и неверно,
то «$A$» неверно (то есть верно «не $A$»)

**Правило удаления отрицания** (правило снятия двойного отрицания):

$$R_{\neg}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Содержательная трактовка:
Если утверждение «неверно $A$» неверно, то «$A$» верно

А куда подевались другие полезные законы и правила?