Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2018, весенний семестр

Лекция 8

Резолютивный вывод

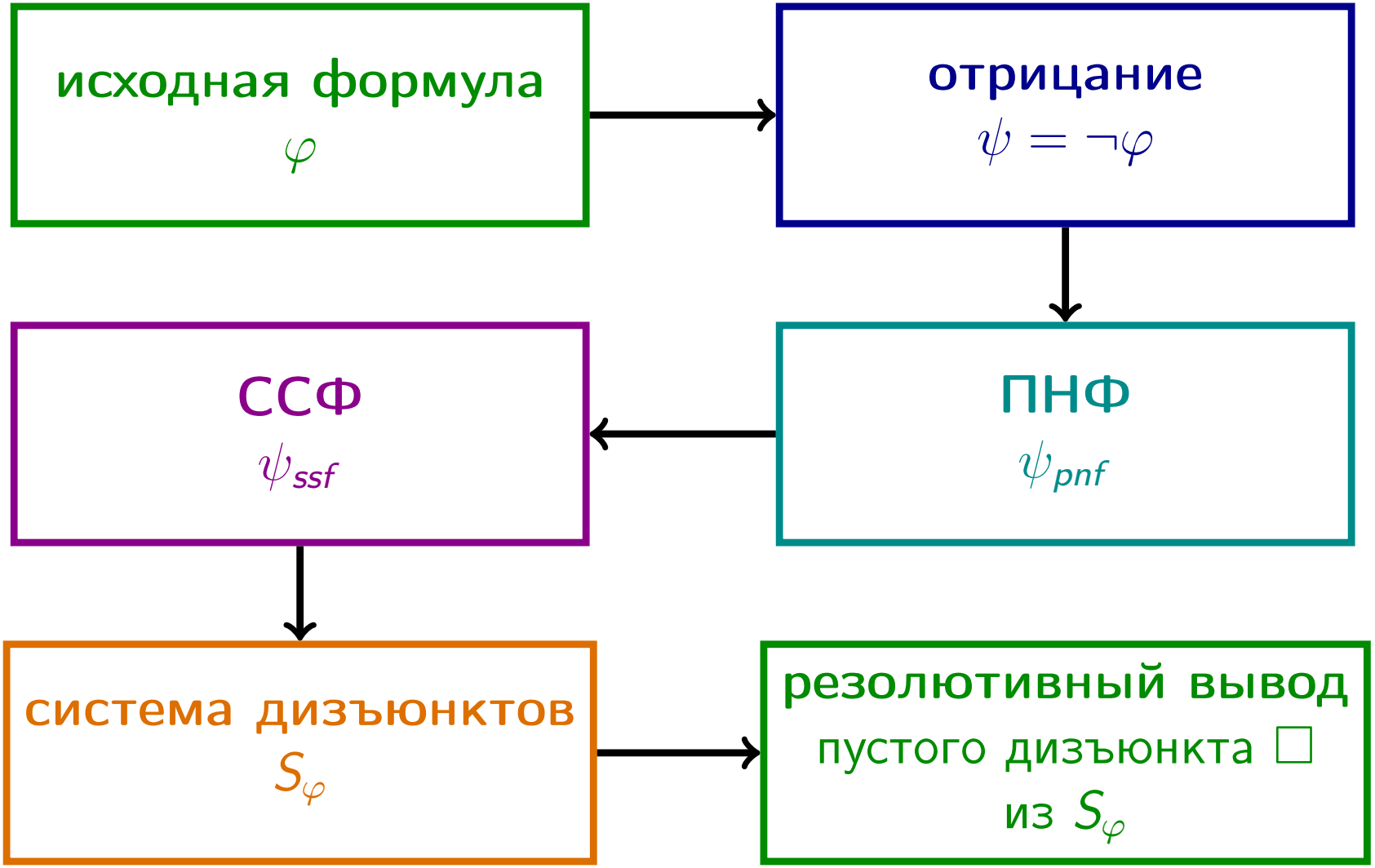
Корректность резолютивного вывода

Применение метода резолюций

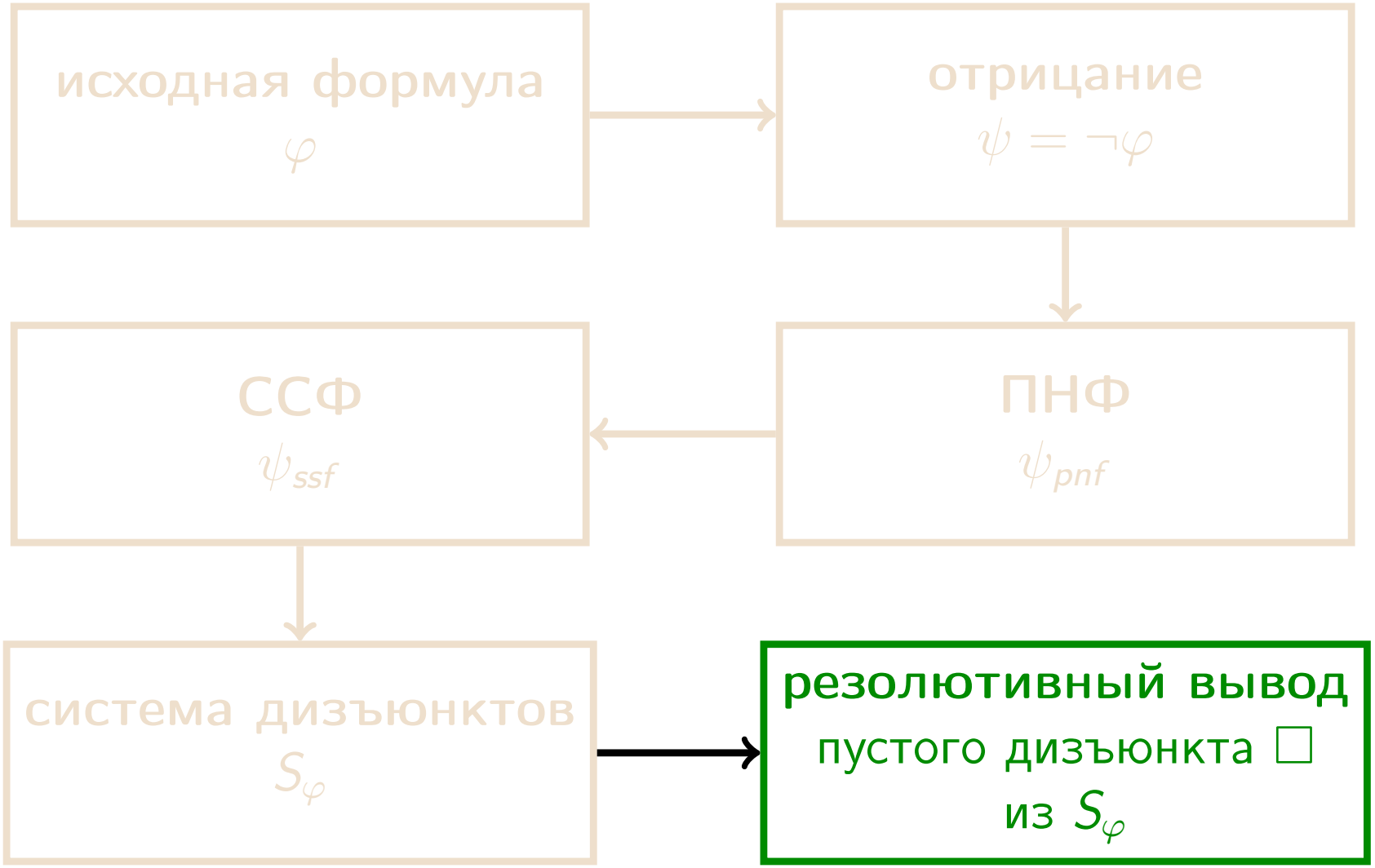
Эрбрановские интерпретации

Теорема Эрбрана

Общая схема метода резолюций



Общая схема метода резолюций



Резолютивный вывод

Ещё немного определений

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Пусть E — логическое выражение и θ — подстановка

Тогда

- $E\theta$ — пример выражения E
- если $\mathsf{Var}_{E\theta} = \emptyset$, то $E\theta$ — основной пример
- если $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Var}$ — биекция, то
  - θ — переименование
  - $E\theta$ — вариант выражения E

Резолютивный вывод

Пример

Рассмотрим выражение E: $\mathrm{P}(\mathtt{x}, \mathbf{f}(\mathtt{y})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathtt{y}, \mathbf{c})$
и подстановки

$$\begin{aligned}
\theta &= \{\mathtt{x}/\mathtt{u}, \mathtt{y}/\mathtt{z}, \mathtt{u}/\mathtt{x}, \mathtt{z}/\mathtt{y}\} \\
\eta &= \{\mathtt{x}/\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathtt{y}/\mathtt{z}\} \\
\mu &= \{\mathtt{z}/\mathbf{c}\} \\
\varepsilon &= \{\}
\end{aligned}$$

Тогда:

- $E\eta$: $\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathtt{z})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathtt{z}, \mathbf{c})$ — пример выражения E
- $E\eta\mu$: $\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ — основной пример выражения E
- подстановки θ и ε — переименования
- $E\theta$: $\mathrm{P}(\mathtt{u}, \mathbf{f}(\mathtt{z})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathtt{z}, \mathbf{c})$ — вариант выражения E

Резолютивный вывод

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1,\ D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- D_1, D_2 — дизъюнкты
- L_1, L_2 — положительные литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила резолюции
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — резольвента
дизъюнктов $D_1 \vee L_1$, $D_2 \vee \neg L_2$

Литеры L_1, $\neg L_2$ образуют контрарную пару

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}) \vee \neg\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z})$$

$$\neg R(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y}), \mathbf{f}(\mathrm{y})), \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y}))$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y}),\ \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{y})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})), \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z}))$$

резольвента: $(\neg\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}))\theta$

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z})$$

$$\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}), \mathrm{z}))) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}), \mathrm{z})), \mathrm{z})$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{z}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}), \mathrm{z})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})), \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}))$$

резольвента: $(\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z}))\theta$

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) \qquad \neg\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))$$

$$\theta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathrm{x})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}), \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v})))$$

резольвента: $(???)\theta$

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$\frac{\textbf{false} \vee \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) \qquad \neg\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v})) \vee \textbf{false}}{\square}$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathrm{x})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}), \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v})))$$

резольвента: $(\textbf{false} \vee \textbf{false})\theta$

Резолютивный вывод

Применение одного только правила резолюции далеко не всегда позволяет вывести $\square$ из противоречивой системы

Например:

$$\mathrm{P}(\mathtt{x}) \vee \mathrm{P}(\mathbf{c})$$
$$\neg\mathrm{P}(\mathbf{c}) \vee \neg\mathrm{P}(\mathtt{y})$$

Система из таких двух дизъюнктов противоречива, но все резольвенты, резольвенты резольвент, ... этих дизъюнктов имеют ровно две литеры

Необходимо иметь правило, которое позволяет работать и с такими системами дизъюнктов

Резолютивный вывод

Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- D — дизъюнкт
- L_1, L_2 — литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила склейки
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \vee L_1)\theta$ — склейка дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют склеиваемую пару

Резолютивный вывод

Пример

склеиваемая пара

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{x}) \quad \vee \quad \neg\mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathbf{f}(\mathrm{x})) \quad \vee \quad \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{z})}{\mathrm{P}(\mathbf{c}) \vee \neg\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathbf{f}(\mathbf{c}))}$$

склейка

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{c}, \mathrm{y}/\mathbf{c}, \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathbf{c})\} \in \text{НОУ}(\neg\mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathbf{f}(\mathrm{x})), \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{z}))$$

склейка: $(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \neg\mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathbf{f}(\mathrm{x})))\theta$

Резолютивный вывод

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это
конечная последовательность дизъюнктов

$$D_1, \ \ldots, \ D_i, \ \ldots, \ D_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_i является

- вариантом дизъюнкта из S,
- склейкой дизъюнкта D_j, где $j < i$, или
- резольвентой дизъюнктов D_j, D_m, где $j < i$ и $m < i$

Дизъюнкт резолютивно выводим из S, если существует
резолютивный вывод из S, оканчивающийся этим дизъюнктом

Резолютивный вывод

Пример

$$S = \{D_1, D_2, D_3\}, \text{ где}$$

$$D_1 = \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}) \qquad D_2 = \neg\mathrm{R}(\mathrm{y})$$

$$D_3 = \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{z}) \vee \neg\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y})$$

Резолютивный вывод из S:

вариант	$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \mathbf{f}(\mathrm{y}_1)) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}_1)$
вариант	$\neg\mathrm{R}(\mathrm{y}_2)$
резольвента	$\mathrm{P}(\mathrm{x}_3, \mathbf{f}(\mathrm{y}_3))$
вариант	$\neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_4), \mathrm{z}_4) \vee \neg\mathrm{P}(\mathrm{y}_4, \mathrm{y}_4)$
склейка	$\neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_5), \mathbf{f}(\mathrm{x}_5))$
резольвента	$\square$

Пустой дизъюнкт **резолютивно выводим** из системы S

Резолютивный вывод

Возможность использования всевозможных **вариантов** дизъюнктов системы наряду с самими дизъюнктами в резолютивном выводе настолько же важна, насколько и возможность использования резольвент и склеек

Например:

$$S = \{\neg \mathrm{P}(\mathtt{x}),\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x}))\}$$

НОУ$(\mathrm{P}(\mathtt{x}), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x}))) = \emptyset$

Значит, у этих дизъюнктов нет ни одной резольвенты

При этом система S противоречива:

у формул $\forall \mathtt{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathtt{x})$ и $\forall \mathtt{x}\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x}))$ **нет общих моделей**

К **вариантам** дизъюнктов из S применимо правило резолюции:

НОУ$(\mathrm{P}(\mathtt{x}_1), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x}_2))) \neq \emptyset$

Возможность использования всевозможных вариантов дизъюнктов обеспечивается следующей равносильностью:

$\forall \mathtt{x}\ \varphi \approx \forall \mathtt{y}\ (\varphi\,\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\})$, если <...>

Резолютивный вывод

Резолютивный вывод успешен, если он оканчивается пустым дизъюнктом $\square$

Успешный резолютивный вывод также называется резолютивным опровержением:

- предположим, что
  исходная система дизъюнктов выполнима
- тогда система, к которой добавлены все дизъюнкты вывода, также выполнима (*это будет обосновано дальше*)
- **противоречие:** среди добавленных дизъюнктов
  есть тождественно ложный ($\square$), а значит,
  расширенная система дизъюнктов невыполнима
- полученное противоречие
  опровергает выполнимость исходной системы
  (*доказывает невыполнимость методом "от противного"*)

Корректность резолютивного вывода

Теорема корректности резолютивного вывода

Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим пустой дизъюнкт, то S — противоречивая система

Доказательство теоремы.

Если $S \models \square$, то система S противоречива,

так как дизъюнкт $\square$ **не имеет ни одной модели**

Покажем, что любой дизъюнкт, резолютивно выводимый из S, является логическим следствием S

Достаточно доказать следующее:

- вариант дизъюнкта D логически следует из D

  (это очевидно)

- резольвента дизъюнктов D_1 и D_2

  логически следует из $\{D_1, D_2\}$

- склейка дизъюнкта D логически следует из D

Корректность резолютивного вывода

Лемма корректности правила резолюции

Если D — резольвента дизъюнктов D_1, D_2, то $D_1, D_2 \models D$

Доказательство леммы. (кванторные приставки опущены)

Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1$, $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$, $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$,

$D = (D_1' \vee D_2')\theta$ и $L_1\theta = L_2\theta = L$

Тогда будет верно:

$$
\begin{array}{lll}
D_1 & \models D_1\theta & D_2 \models D_2\theta \\
D_1 & \models D_1'\theta \vee L_1\theta & D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L_2\theta \\
D_1 & \models D_1'\theta \vee L & D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L \\
D_1, D_2 & \models D_1'\theta \vee L & D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L \\
D_1, D_2 & \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee L & D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee \neg L
\end{array}
$$

Заметим, что (очевидно?)

$$\text{если } \Gamma \models A \vee B \text{ и } \Gamma \models A \vee \neg B, \text{ то } \Gamma \models A$$

Тогда $D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta$

То есть $D_1, D_2 \models D$ ▼

Корректность резолютивного вывода

Лемма корректности правила склейки

Если D — склейка дизъюнкта D_1, то $D_1 \models D$

Доказательство леммы.

Похоже на доказательство корректности правила резолюции (то есть очевидно) ▼

▼

Применение метода резолюций

Вспомним, для чего вводился резолютивный вывод

Рассмотрим такую формулу:

$$\varphi : \exists \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\ \&(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$$

Задача: проверить общезначимость φ

$$\models \varphi\ ?$$

Покажем, как эта задача решается с помощью

метода резолюций

Применение метода резолюций

Решение

Этап 1. Перейти к проверке противоречивости отрицания $\psi = \neg\varphi$

$$\neg\exists x\ (P(x)\ \&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

Этап 2. Построить равносильную

предварённую нормальную форму ψ_{pnf}

$$\forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x)\ \&(\neg P(z) \vee R(x,y))\ \&\ \neg R(x,u))$$

Этап 3. Построить равновыполнимую

сколемовскую стандартную форму ψ_{ssf}

$$\forall x\ \forall u\ (P(x)\ \&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\ \&\ \neg R(x,u))$$

Этап 4. Перейти к проверке противоречивости системы S_φ

$$\left\{ \begin{array}{c} P(x) \\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)) \\ \neg R(x,u) \end{array} \right\}$$

Применение метода резолюций

Решение

Этап 5. Резолютивно вывести пустой дизъюнкт из S_φ

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{P}(\mathtt{x}) \\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x})) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathbf{g}(\mathtt{x})) \\ \neg\mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{u}) \end{array} \right\}$$

вариант	$\neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x}_1)) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x}_1, \mathbf{g}(\mathtt{x}_1))$
вариант	$\mathrm{P}(\mathtt{x}_2)$
резольвента	$\mathrm{R}(\mathtt{x}_3, \mathbf{g}(\mathtt{x}_3))$
вариант	$\neg\mathrm{R}(\mathtt{x}_4, \mathtt{u}_4)$
резольвента	$\square$

Применение метода резолюций

Решение

Нами построен успешный резолютивный вывод пустого дизъюнкта из S_φ

Теорема корректности резолютивного вывода:

система S_φ противоречива

Теорема о переходе к дизъюнктам: ССФ ψ_{ssf} противоречива

Теорема о сколемизации: ПНФ ψ_{pnf} противоречива

Теорема о предварённой нормальной форме:

формула ψ противоречива

$\psi = \neg\varphi$: **формула φ общезначима**

Применение метода резолюций

Для метода семантических таблиц были исследованы

- корректность: верно ли, что наличие успешного вывода означает общезначимость формулы
- полнота: верно ли, что для любой общезначимой формулы можно построить успешный вывод

Построить систему дизъюнктов S_φ
можно для любой формулы φ (очевидно?)

Если удалось показать, что из S_φ резолютивно выводим $\square$,
то формула φ констатируется общезначимой
(теорема корректности)

А верно ли, что из любой противоречивой системы дизъюнктов резолютивно выводим пустой дизъюнкт?

Эрбрановские интерпретации

Система дизъюнктов S противоречива $\Leftrightarrow$
для **любой** интерпретации $\mathcal{I}$ **существуют** дизъюнкт $\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (L_1 \vee \cdots \vee L_m)$ из S и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

$$\mathcal{I} \not\models L_1[\widetilde{d}^n], \qquad \ldots, \qquad \mathcal{I} \not\models L_m[\widetilde{d}^n]$$

Иногда при обосновании существования таких наборов $\widetilde{d}^n$ можно избежать явного перебора **всех** интерпретаций и углубления в природу их предметных областей

Например, для доказательства невыполнимости системы $\{\mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\}$ достаточно заметить, что независимо от выбора интерпретации $\mathcal{I}$

$$\text{либо } \mathcal{I} \not\models \mathrm{P}(\mathrm{x})[\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{c}})], \qquad \text{либо } \mathcal{I} \not\models \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$$

Пытаясь рассуждать о предметах, не отталкиваясь от их природы и используя только термальное представление, мы неизбежно приходим к **эрбрановским интерпретациям**

Эрбрановские интерпретации

В основе эрбрановских интерпретаций лежат
свободные алгебры термов[1]

Эрбрановская интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{H}_\sigma, \overline{\mathsf{Const}}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathsf{Func}}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathsf{Pred}} \rangle$
сигнатуры $\sigma = \langle \mathsf{Const}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$ состоит из

- **стандартной** предметной области $\mathcal{H}_\sigma$:
  эрбрановского универсума ($\mathcal{H}$-универсума)
  - $\mathcal{H}_\sigma$ — это множество всех основных термов[2] сигнатуры
    - σ, если $\mathsf{Const} \neq \emptyset$
    - $\langle \{\mathbf{c}\}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$, если $\mathsf{Const} = \emptyset$
      ($\mathbf{c}$ — эрбрановская константа)

---

[1] Думали увидеть это название в лекции 7 и навсегда забыть —
но не тут-то было!

[2] Лекция 3: это термы, не содержащие переменных

Эрбрановские интерпретации

В основе эрбрановских интерпретаций лежат

свободные алгебры термов

Эрбрановская интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{H}_\sigma, \overline{\mathsf{Const}}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathsf{Func}}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathsf{Pred}} \rangle$
сигнатуры $\sigma = \langle \mathsf{Const}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$ состоит из

- **стандартной** оценки констант $\overline{\mathsf{Const}}_{\mathcal{H}}$:
  - $\overline{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$ $\qquad (\mathbf{c} \in \mathsf{Const})$
- **стандартной** оценки функциональных символов $\overline{\mathsf{Func}}_{\mathcal{H}}$:
  - $\overline{\mathbf{f}}(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)$ $\qquad (\mathbf{f} \in \mathsf{Func};\ t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma)$
- **произвольной** оценки предикатных символов $\overline{\mathsf{Pred}}$

Эрбрановские интерпретации

$\mathcal{H}$-интерпретации заданной сигнатуры отличаются друг от друга **только** оценкой предикатных символов, то есть при переборе таких интерпретаций можно не задумываться о том, какую природу имеют

- предметная область:
  - это $\mathcal{H}$-универсум
- оценки констант и функциональных символов:
  - значение основного терма — это сам терм

Что более важно: для выяснения того, противоречива ли система дизъюнктов, достаточно проверить, имеет ли она хотя бы одну эрбрановскую модель

(*об этом речь будет идти дальше*)

Эрбрановские интерпретации

Теорема об $\mathcal{H}$-интерпретациях

Система дизъюнктов выполнима тогда и только тогда, когда она имеет эрбрановскую модель

Доказательство.

($\Leftarrow$): очевидно

($\Rightarrow$): Пусть S — выполнимая система дизъюнктов
и $\mathcal{I} = \left\langle \mathsf{D}_{\mathcal{I}}, \overline{\mathsf{Const}}, \overline{\mathsf{Func}}, \overline{\mathsf{Pred}} \right\rangle$ — её модель (сигнатуры σ)

Дополним интерпретацию $\mathcal{I}$ оценкой эрбрановской константы, если сигнатура σ не содержит констант

Рассмотрим такое отображение $\alpha : \mathcal{H}_\sigma \to \mathsf{D}_{\mathcal{I}}$:
$\alpha(t)$ — значение **основного** терма t в интерпретации $\mathcal{I}$

Покажем, что моделью для S будет такая **эрбрановская** интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \left\langle \mathcal{H}_\sigma, \overline{\mathsf{Const}}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathsf{Func}}_{\mathcal{H}}, \overline{\overline{\mathsf{Pred}}} \right\rangle$:

$$\overline{\overline{\mathrm{P}}}(t_1, \ldots, t_k) = \overline{\mathrm{P}}(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k))$$

Эрбрановские интерпретации

Доказательство. ($\Rightarrow$):

Предположим, что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ не является моделью для S

Тогда существует дизъюнкт $A_1 \vee \cdots \vee A_m \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_q \in S$, такой что ($A_i$, B_j — атомы)

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models \forall \widetilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{n}} \, (A_1 \vee \cdots \vee A_m \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_q)$$

Значит, существуют основные термы (**предметы** $\mathcal{H}_\sigma$) $t_1, \ldots, t_n$, такие что

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_1[t_1, \ldots, t_n], \ldots, \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_m[t_1, \ldots, t_n]$$
$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_1[t_1, \ldots, t_n], \ldots, \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_q[t_1, \ldots, t_n]$$

Отображение α — гомоморфизм интерпретации $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ в интерпретацию $\mathcal{I}$:

$$\alpha(\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k)) = \bar{\mathbf{f}}(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k))$$

Значит, для любого атома A верно:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models A[t_1, \ldots, t_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models A[\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n)]$$

Эрбрановские интерпретации

Доказательство. ($\Rightarrow$):

$$A_1 \vee \dots \vee A_m \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_q \in S$$
$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_1[t_1, \dots, t_n], \dots, \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_m[t_1, \dots, t_n]$$
$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_1[t_1, \dots, t_n], \dots, \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_q[t_1, \dots, t_n]$$
$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models A[t_1, \dots, t_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models A[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)]$$

Тогда

$$\mathcal{I} \not\models A_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)], \dots, \mathcal{I} \not\models A_m[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)]$$
$$\mathcal{I} \models B_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)], \dots, \mathcal{I} \models B_q[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)]$$

и

$$\mathcal{I} \not\models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}} \, (A_1 \vee \dots \vee A_m \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_q)$$

Получено противоречие с тем, что $\mathcal{I}$ — модель для S

Значит, предположение о том, что интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ не является моделью для S, неверно ▼

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский базис ($B_{\mathcal{H}}$) — это множество всех атомов, построенных над термами эрбрановского универсума

$\mathcal{H}$-интерпретация $\mathcal{I}$ **полностью** определяется тем, какие атомы из $B_{\mathcal{H}}$ в ней истинны, то есть множеством

$$B^{\mathcal{I}} = \{A \mid A \in B_{\mathcal{H}},\ \mathcal{I} \models A\}$$

Например,

- если $B^{\mathcal{I}} = \emptyset$, то все основные атомы **ложны** в $\mathcal{I}$
- если $B^{\mathcal{I}} = B_{\mathcal{H}}$, то все основные атомы **истинны** в $\mathcal{I}$
- множество $B^{\mathcal{I}} \cap B^{\mathcal{J}}$ определяет интерпретацию, в которой истинны те и только те основные атомы, которые истинны в обеих интерпретациях $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$

Далее эрбрановские интерпретации будем отождествлять с подмножествами эрбрановского базиса

Эрбрановские интерпретации

Система дизъюнктов S противоречива

$$\Leftrightarrow$$

Для каждой $\mathcal{H}$-интерпретации $\mathcal{I}$ найдутся дизъюнкт $D \in S$ и набор основных термов $t_1, \ldots, t_n$, такие что

$$\mathcal{I} \not\models D[t_1, \ldots, t_n]$$

$$\Leftrightarrow$$

Для каждой $\mathcal{H}$-интерпретации $\mathcal{I}$ существует основной[1] пример[2] D' дизъюнкта $D \in S$, такой что

$$\mathcal{I} \not\models D'$$

---

[1] D' не содержит переменных

[2] $D' = D\theta$ для некоторой подстановки θ

Эрбрановские интерпретации

Рассмотрим такое множество дизъюнктов $\mathcal{G}_S$:

$$D \in \mathcal{G}_S \Leftrightarrow \begin{cases} D \text{ — основной пример какого-либо дизъюнкта из } S; \\ \text{существует } \mathcal{H}\text{-интерпретация } \mathcal{I}, \text{ такая что } \mathcal{I} \not\models D \end{cases}$$

Тогда

система дизъюнктов S противоречива

$$\Leftrightarrow$$

система дизъюнктов $\mathcal{G}_S$ противоречива

Эрбрановские интерпретации

Теорема компактности Мальцева: $\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует **конечное** подмножество Γ' множества Γ, такое что $\Gamma' \models \varphi$

Следствие: множество замкнутых формул Γ противоречиво $\quad \Leftrightarrow$ существует **конечное** противоречивое подмножество Γ' множества Γ

Применим это следствие к системе $\mathcal{G}_S$:

множество $\mathcal{G}_S$ противоречиво

$$\Leftrightarrow$$

существует **конечное** противоречивое подмножество $\mathcal{G}'$ множества $\mathcal{G}_S$

Только что мы доказали **теорему Эрбрана**

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов противоречива

$$\Leftrightarrow$$

существует конечное противоречивое множество основных примеров дизъюнктов этой системы

Основной пример дизъюнкта не содержит кванторов и предметных переменных

Значит, конечная система основных примеров дизъюнктов — это (*с небольшими техническими поправками*) **конечная система булевых формул**

Значит ли это, что (*неразрешимая*) проблема общезначимости формул логики предикатов сводится к (*NP-полной*) проблеме выполнимости булевых формул?

Нет: в теореме Эрбрана не говорится, как построить подходящую систему основных примеров дизъюнктов

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов противоречива

$$\Leftrightarrow$$

существует конечное противоречивое множество основных примеров дизъюнктов этой системы

Теорема Эрбрана является отправной точкой обоснования полноты резолютивного вывода (*в следующей лекции*)

Схема обоснования полноты будет выглядеть так:

- рассмотрим противоречивую систему дизъюнктов S
- существует конечная противоречивая система S' основных примеров этих дизъюнктов
- система S' устроена настолько просто, что из неё можно легко вывести $\square$
- по выводу $\square$ из S' можно (*не так просто, но всё же*) построить вывод $\square$ из S