Математическая логика
и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2016, весенний семестр

Вступление

В Лекции 14 была описана теория множеств Цермело-Френкеля (ZF), содержащая

- аксиому, определяющую равенство множеств (аксиома объёмности)
- аксиомы существования большого числа “хороших” множеств
- аксиому, устраняющую парадоксы теории множеств (аксиома регулярности)

Вступление

В Лекции 14 была описана теория множеств Цермело-Френкеля (ZF), содержащая

- аксиому, определяющую равенство множеств (аксиома объёмности)
- аксиомы существования большого числа “хороших” множеств
- аксиому, устраняющую парадоксы теории множеств (аксиома регулярности)

Достаточно ли **только** этих аксиом, чтобы полноценно рассуждать о свойствах множеств?

Определимые символы

В лекции 14 был введён ряд сокращений, использовавшихся в описании аксиом ZF

Определимые символы

В лекции 14 был введён ряд сокращений, использовавшихся в описании аксиом ZF, например,

$$\emptyset \in \mathtt{x}$$

Определимые символы

В лекции 14 был введён ряд сокращений, использовавшихся в описании аксиом ZF, например,

$$\emptyset \in \mathtt{X}, \quad \mathtt{y} = \mathtt{x} \cup \{\mathtt{x}\}$$

Определимые символы

В лекции 14 был введён ряд сокращений, использовавшихся в описании аксиом ZF, например,

$$\emptyset \in \mathtt{x}, \quad \mathtt{y} = \mathtt{x} \cup \{\mathtt{x}\}, \quad \mathtt{x} \subseteq \mathtt{y}, \quad \ldots$$

Определимые символы

В лекции 14 был введён ряд сокращений, использовавшихся в описании аксиом ZF, например,

$$\emptyset \in \mathtt{X}, \quad \mathtt{y} = \mathtt{x} \cup \{\mathtt{x}\}, \quad \mathtt{x} \subseteq \mathtt{y}, \quad \ldots$$

Эти сокращения позволяли содержательно рассуждать о предметах и отношениях предполагаемой модели теории множеств, и при этом не расширяли сигнатуру алфавита

Определимые символы

В лекции 14 был введён ряд сокращений, использовавшихся в описании аксиом ZF, например,

$$\emptyset \in \mathtt{X}, \quad \mathtt{y} = \mathtt{x} \cup \{\mathtt{x}\}, \quad \mathtt{x} \subseteq \mathtt{y}, \quad \ldots$$

Эти сокращения позволяли содержательно рассуждать о предметах и отношениях предполагаемой модели теории множеств, и при этом не расширяли сигнатуру алфавита

Опишем общий способ работы с предметами и отношениями, не входящими в сигнатуру теории множеств

Определимые символы

Рассмотрим предикатный символ $\mathrm{R}^{(n)}$, функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$ и константу $\mathbf{c}$, не входящие в сигнатуру рассматриваемого алфавита

Определимые символы

Рассмотрим предикатный символ $\mathrm{R}^{(n)}$, функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$ и константу $\mathbf{c}$, не входящие в сигнатуру рассматриваемого алфавита

Определение символа

- R — это формула вида $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Определимые символы

Рассмотрим предикатный символ $\mathrm{R}^{(n)}$, функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$ и константу **c**, не входящие в сигнатуру рассматриваемого алфавита

Определение символа

- R — это формула вида $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$
  - такое определение придаёт символу R значение отношения φ

Определимые символы

Рассмотрим предикатный символ $\mathrm{R}^{(n)}$, функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$ и константу **c**, не входящие в сигнатуру рассматриваемого алфавита

Определение символа

- R — это формула вида $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$
  - такое определение придаёт символу R значение отношения φ
- **f** — это формула вида $\varphi(\mathrm{y}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Определимые символы

Рассмотрим предикатный символ $\mathrm{R}^{(n)}$, функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$ и константу **c**, не входящие в сигнатуру рассматриваемого алфавита

Определение символа

- R — это формула вида $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$
  - такое определение придаёт символу R значение отношения φ
- **f** — это формула вида $\varphi(\mathrm{y}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$
  - такое определение придаёт символу **f** следующее значение: $\mathrm{y} = \mathbf{f}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \equiv \varphi(\mathrm{y}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Определимые символы

Рассмотрим предикатный символ $\mathrm{R}^{(n)}$, функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$ и константу $\mathbf{c}$, не входящие в сигнатуру рассматриваемого алфавита

Определение символа

- R — это формула вида $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$
  - такое определение придаёт символу R значение отношения φ
- $\mathbf{f}$ — это формула вида $\varphi(\mathrm{y}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$
  - такое определение придаёт символу $\mathbf{f}$ следующее значение: $\mathrm{y} = \mathbf{f}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \equiv \varphi(\mathrm{y}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$
- $\mathbf{c}$ — это формула вида $\varphi(\mathrm{y})$

Определимые символы

Рассмотрим предикатный символ $\mathrm{R}^{(n)}$, функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$ и константу $\mathbf{c}$, не входящие в сигнатуру рассматриваемого алфавита

Определение символа

- R — это формула вида $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})$
  - такое определение придаёт символу R значение отношения φ
- $\mathbf{f}$ — это формула вида $\varphi(\mathrm{y}, \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})$
  - такое определение придаёт символу $\mathbf{f}$ следующее значение: $\mathrm{y} = \mathbf{f}(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}) \equiv \varphi(\mathrm{y}, \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})$
- $\mathbf{c}$ — это формула вида $\varphi(\mathrm{y})$

Функциональный или предикатный символ s — определённый, если ему сопоставлено определение D_s

Определимые символы

Примеры определений

Определимые символы

Примеры определений

$$D_{\neq^{(2)}}: \qquad \neg \mathtt{x}_1 = \mathtt{x}_2$$

Определимые символы

Примеры определений

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{D}_{\neq^{(2)}}: & \neg \mathtt{x}_1 = \mathtt{x}_2 \\
\mathrm{D}_{\subseteq^{(2)}}: & \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \to \mathtt{z} \in \mathtt{x}_2)
\end{array}
$$

Определимые символы

Примеры определений

$$
\begin{array}{ll}
D_{\neq^{(2)}}: & \neg \mathtt{x}_1 = \mathtt{x}_2 \\
D_{\subseteq^{(2)}}: & \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \to \mathtt{z} \in \mathtt{x}_2) \\
D_{\emptyset}: & \forall \mathtt{z}\, \neg \mathtt{z} \in \mathtt{x}_1
\end{array}
$$

Определимые символы

Примеры определений

$$
\begin{aligned}
D_{\neq^{(2)}} &: \quad \neg \mathtt{x}_1 = \mathtt{x}_2 \\
D_{\subseteq^{(2)}} &: \quad \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \to \mathtt{z} \in \mathtt{x}_2) \\
D_{\emptyset} &: \quad \forall \mathtt{z}\, \neg \mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \\
D_{\{\cdot,\cdot\}^{(2)}} &: \quad \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{z} = \mathtt{x}_1 \lor \mathtt{z} = \mathtt{x}_2)
\end{aligned}
$$

Определимые символы

Примеры определений

$$
\begin{array}{ll}
D_{\neq^{(2)}}: & \neg x_1 = x_2 \\
D_{\subseteq^{(2)}}: & \forall z\, (z \in x_1 \to z \in x_2) \\
D_{\emptyset}: & \forall z\, \neg z \in x_1 \\
D_{\{\cdot,\cdot\}^{(2)}}: & \forall z\, (z = x_1 \lor z = x_2) \\
D_{\cap^{(2)}}: & \forall z\, (z \in y \equiv (z \in x_1 \,\&\, z \in x_2))
\end{array}
$$

Определимые символы

Примеры определений

$$
\begin{array}{ll}
D_{\neq^{(2)}}: & \neg x_1 = x_2 \\
D_{\subseteq^{(2)}}: & \forall z\,(z \in x_1 \to z \in x_2) \\
D_{\emptyset}: & \forall z\,\neg z \in x_1 \\
D_{\{\cdot,\cdot\}^{(2)}}: & \forall z\,(z = x_1 \lor z = x_2) \\
D_{\cap^{(2)}}: & \forall z\,(z \in y \equiv (z \in x_1 \,\&\, z \in x_2)) \\
D_{\cup^{(2)}}: & \forall z\,(z \in y \equiv (z \in x_1 \lor z \in x_2))
\end{array}
$$

Определимые символы

Примеры определений

$$
\begin{aligned}
D_{\neq^{(2)}}: &\quad \neg x_1 = x_2 \\
D_{\subseteq^{(2)}}: &\quad \forall z\,(z \in x_1 \to z \in x_2) \\
D_{\emptyset}: &\quad \forall z\,\neg z \in x_1 \\
D_{\{\cdot,\cdot\}^{(2)}}: &\quad \forall z\,(z = x_1 \vee z = x_2) \\
D_{\cap^{(2)}}: &\quad \forall z\,(z \in y \equiv (z \in x_1 \,\&\, z \in x_2)) \\
D_{\cup^{(2)}}: &\quad \forall z\,(z \in y \equiv (z \in x_1 \vee z \in x_2)) \\
D_{\mathbf{0}} = &\quad D_{\emptyset}
\end{aligned}
$$

Определимые символы

Примеры определений

$$
\begin{array}{ll}
D_{\neq^{(2)}}: & \neg \mathtt{x}_1 = \mathtt{x}_2 \\
D_{\subseteq^{(2)}}: & \forall \mathtt{z}\,(\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \to \mathtt{z} \in \mathtt{x}_2) \\
D_{\emptyset}: & \forall \mathtt{z}\, \neg \mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \\
D_{\{\cdot,\cdot\}^{(2)}}: & \forall \mathtt{z}\,(\mathtt{z} = \mathtt{x}_1 \vee \mathtt{z} = \mathtt{x}_2) \\
D_{\cap^{(2)}}: & \forall \mathtt{z}\,(\mathtt{z} \in \mathtt{y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \,\&\, \mathtt{z} \in \mathtt{x}_2)) \\
D_{\cup^{(2)}}: & \forall \mathtt{z}\,(\mathtt{z} \in \mathtt{y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \vee \mathtt{z} \in \mathtt{x}_2)) \\
D_{\mathbf{0}} = & D_{\emptyset} \\
D_{\mathbf{S}^{(1)}}: & \forall \mathtt{z}\,(\mathtt{z} \in \mathtt{y} \equiv (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \vee \mathtt{z} = \mathtt{x}_1))
\end{array}
$$

Определимые символы

Примеры определений

$$
\begin{array}{ll}
D_{\neq^{(2)}}: & \neg x_1 = x_2 \\
D_{\subseteq^{(2)}}: & \forall z\,(z \in x_1 \to z \in x_2) \\
D_{\emptyset}: & \forall z\, \neg z \in x_1 \\
D_{\{\cdot,\cdot\}^{(2)}}: & \forall z\,(z = x_1 \vee z = x_2) \\
D_{\cap^{(2)}}: & \forall z\,(z \in y \equiv (z \in x_1 \,\&\, z \in x_2)) \\
D_{\cup^{(2)}}: & \forall z\,(z \in y \equiv (z \in x_1 \vee z \in x_2)) \\
D_{\mathbf{0}} = & D_{\emptyset} \\
D_{\mathbf{S}^{(1)}}: & \forall z\,(z \in y \equiv (z \in x_1 \vee z = x_1))
\end{array}
$$

А как использовать определения при исследовании формулы, содержащей определённые символы?

Определимые символы

Формулу в сигнатуре, отличной от $\sigma = \left\langle \emptyset, \emptyset, \left\{ \in^{(2)} \right\} \right\rangle$, будем отождествлять с формулой в сигнатуре σ, в которой

Определимые символы

Формулу в сигнатуре, отличной от $\sigma = \langle \emptyset, \emptyset, \{\in^{(2)}\}\rangle$, будем отождествлять с формулой в сигнатуре σ, в которой

- каждый атом $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ заменён на $\mathrm{D_P}\{\mathtt{x_1}/t_1, \ldots, \mathtt{x_n}/t_n\}$

(P — определённый предикатный символ, отличный от $\in$)
(каждая переменная $\mathtt{x_i}$ считается свободной для t_i в $\mathrm{D_P}$)

Определимые символы

Формулу в сигнатуре, отличной от $\sigma = \langle \emptyset, \emptyset, \{\in^{(2)}\} \rangle$, будем отождествлять с формулой в сигнатуре σ, в которой

- каждый атом $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ заменён на $\mathrm{D}_\mathrm{P}\{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_n/t_n\}$
- каждый атом $A[\![\mathbf{c}]\!]$ заменён на $\forall \mathrm{y}\, (\mathrm{D}_\mathbf{c} \to A[\![\mathbf{c}/\mathrm{y}]\!])$

(P — определённый предикатный символ, отличный от $\in$)
(каждая переменная $\mathtt{x}_\mathtt{i}$ считается свободной для t_i в D_P)
($\mathbf{c}$ — определённая константа)
(y — “свежая” переменная)

Определимые символы

Формулу в сигнатуре, отличной от $\sigma = \langle \emptyset, \emptyset, \{\in^{(2)}\} \rangle$, будем отождествлять с формулой в сигнатуре σ, в которой

- каждый атом $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ заменён на $\mathrm{D_P}\{\mathrm{x_1}/t_1, \ldots, \mathrm{x_n}/t_n\}$
- каждый атом $A[\![\mathbf{c}]\!]$ заменён на $\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{D}_\mathbf{c} \to A[\![\mathbf{c}/\mathrm{y}]\!])$
- каждый атом $A[\![\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)]\!]$ заменён на $\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{D}_\mathbf{f}\{\mathrm{x_1}/t_1, \ldots, \mathrm{x_n}/t_n\} \to A[\![\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)/\mathrm{y}]\!])$

(P — определённый предикатный символ, отличный от $\in$)
(каждая переменная $\mathrm{x_i}$ считается свободной для t_i в $\mathrm{D_P}$)
($\mathbf{c}$ — определённая константа)
(y — “свежая” переменная)
($\mathbf{f}$ — определённый функциональный символ)

Определимые символы

Пример

$$\mathtt{x} \subseteq \mathtt{y} \cap \mathtt{z}$$

Определимые символы

Пример

$$\mathrm{x} \subseteq \mathrm{y} \cap \mathrm{z}$$

$$\leadsto$$

$$\forall \mathrm{u}\ (\mathrm{D}_{\cap}\{\mathrm{y}/\mathrm{u}, \mathrm{x}_1/\mathrm{y}, \mathrm{x}_2/z\} \to \mathrm{x} \subseteq \mathrm{u})$$

Определимые символы

Пример

$$\mathtt{x} \subseteq \mathtt{y} \cap \mathtt{z}$$
$$\rightsquigarrow$$
$$\forall \mathtt{u}\ (\mathrm{D}_{\cap}\{\mathtt{y}/\mathtt{u}, \mathtt{x}_1/\mathtt{y}, \mathtt{x}_2/z\} \to \mathtt{x} \subseteq \mathtt{u})$$
$$=$$
$$\forall \mathtt{u}\ (\forall \mathtt{w}\ (\mathtt{w} \in \mathtt{u} \equiv (\mathtt{w} \in \mathtt{y} \,\&\, \mathtt{w} \in \mathtt{z})) \to \mathtt{x} \subseteq \mathtt{u})$$

Определимые символы

Пример

$$\mathrm{x} \subseteq \mathrm{y} \cap \mathrm{z}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall \mathrm{u}\ (D_{\cap}\{\mathrm{y}/\mathrm{u}, \mathrm{x}_1/\mathrm{y}, \mathrm{x}_2/z\} \to \mathrm{x} \subseteq \mathrm{u})$$

$$=$$

$$\forall \mathrm{u}\ (\forall \mathrm{w}\ (\mathrm{w} \in \mathrm{u} \equiv (\mathrm{w} \in \mathrm{y}\ \&\ \mathrm{w} \in \mathrm{z})) \to \mathrm{x} \subseteq \mathrm{u})$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall \mathrm{u}\ (\forall \mathrm{w}\ (\mathrm{w} \in \mathrm{u} \equiv (\mathrm{w} \in \mathrm{y}\ \&\ \mathrm{w} \in \mathrm{z})) \to D_{\subseteq}\{\mathrm{x}_1/\mathrm{x}, \mathrm{x}_2/\mathrm{u}\})$$

Определимые символы

Пример

$$\mathtt{x} \subseteq \mathtt{y} \cap \mathtt{z}$$

$$\leadsto$$

$$\forall \mathtt{u}\,(D_{\cap}\,\{\mathtt{y}/\mathtt{u}, \mathtt{x}_1/\mathtt{y}, \mathtt{x}_2/z\} \to \mathtt{x} \subseteq \mathtt{u})$$

$$=$$

$$\forall \mathtt{u}\,(\forall \mathtt{w}\,(\mathtt{w} \in \mathtt{u} \equiv (\mathtt{w} \in \mathtt{y}\,\&\,\mathtt{w} \in \mathtt{z})) \to \mathtt{x} \subseteq \mathtt{u})$$

$$\leadsto$$

$$\forall \mathtt{u}\,(\forall \mathtt{w}\,(\mathtt{w} \in \mathtt{u} \equiv (\mathtt{w} \in \mathtt{y}\,\&\,\mathtt{w} \in \mathtt{z})) \to D_{\subseteq}\,\{\mathtt{x}_1/\mathtt{x}, \mathtt{x}_2/\mathtt{u}\})$$

$$=$$

$$\forall \mathtt{u}\,(\forall \mathtt{w}\,(\mathtt{w} \in \mathtt{u} \equiv (\mathtt{w} \in \mathtt{y}\,\&\,\mathtt{w} \in \mathtt{z})) \to \forall \mathtt{z}\,(\mathtt{z} \in \mathtt{x} \to \mathtt{z} \in \mathtt{u}))$$

Определимые символы

Пример

$$\mathrm{x} \subseteq \mathrm{y} \cap \mathrm{z}$$
$$\rightsquigarrow$$
$$\forall \mathrm{u}\,(\mathrm{D}_{\cap}\,\{\mathrm{y}/\mathrm{u}, \mathrm{x}_1/\mathrm{y}, \mathrm{x}_2/z\} \to \mathrm{x} \subseteq \mathrm{u})$$
$$=$$
$$\forall \mathrm{u}\,(\forall \mathrm{w}\,(\mathrm{w} \in \mathrm{u} \equiv (\mathrm{w} \in \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{w} \in \mathrm{z})) \to \mathrm{x} \subseteq \mathrm{u})$$
$$\rightsquigarrow$$
$$\forall \mathrm{u}\,(\forall \mathrm{w}\,(\mathrm{w} \in \mathrm{u} \equiv (\mathrm{w} \in \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{w} \in \mathrm{z})) \to \mathrm{D}_{\subseteq}\,\{\mathrm{x}_1/\mathrm{x}, \mathrm{x}_2/\mathrm{u}\})$$
$$=$$
$$\forall \mathrm{u}\,(\forall \mathrm{w}\,(\mathrm{w} \in \mathrm{u} \equiv (\mathrm{w} \in \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{w} \in \mathrm{z})) \to \forall \mathrm{z}\,(\mathrm{z} \in \mathrm{x} \to \mathrm{z} \in \mathrm{u}))$$

В формулах можно использовать любые символы, если им даны определения

Определимые символы

Пример

Определение натурального числа **n**

Определимые символы

Пример

Определение натурального числа $\mathbf{n}$

Предположим, натуральное число $(\mathbf{n}-\mathbf{1})$ определено

Определимые символы

Пример

Определение натурального числа $\mathbf{n}$

Предположим, натуральное число $(\mathbf{n}-\mathbf{1})$ определено Тогда

$$\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\colon \forall z\,(z \in y \equiv (z = (\mathbf{n}-\mathbf{1}) \vee z \in (\mathbf{n}-\mathbf{1})))$$

Определимые символы

Пример

Определение натурального числа $\mathbf{n}$

Предположим, натуральное число $(\mathbf{n}-\mathbf{1})$ определено Тогда

$$\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\colon \forall \mathrm{z}\,(\mathrm{z} \in \mathrm{y} \equiv (\mathrm{z} = (\mathbf{n}-\mathbf{1}) \vee \mathrm{z} \in (\mathbf{n}-\mathbf{1})))$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall \mathrm{z}\,(\mathrm{z} \in \mathrm{y} \equiv \forall \mathrm{u}\,(\mathrm{D}_{\mathbf{n}-\mathbf{1}}(\mathrm{u}) \to \mathrm{z} = \mathrm{u} \vee \mathrm{z} \in \mathrm{u}))$$

Определимые символы

Пример

Определение натурального числа $\mathbf{n}$

Предположим, натуральное число $(\mathbf{n}-\mathbf{1})$ определено Тогда

$$\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\colon \forall \mathrm{z}\,(\mathrm{z} \in \mathrm{y} \equiv (\mathrm{z} = (\mathbf{n}-\mathbf{1}) \vee \mathrm{z} \in (\mathbf{n}-\mathbf{1})))$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall \mathrm{z}\,(\mathrm{z} \in \mathrm{y} \equiv \forall \mathrm{u}\,(\mathrm{D}_{\mathbf{n}-\mathbf{1}}(\mathrm{u}) \to \mathrm{z} = \mathrm{u} \vee \mathrm{z} \in \mathrm{u}))$$

В определениях символов можно использовать определённые ранее символы

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Попробуем доказать такое несложное утверждение:

Утверждение

Во всяком бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Попробуем доказать такое несложное утверждение:

Утверждение

Во всяком бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество

Доказательство.

В любом бесконечном множестве X содержится хотя бы один элемент e_1

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Попробуем доказать такое несложное утверждение:

Утверждение

Во всяком бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество

Доказательство.

В любом бесконечном множестве X содержится хотя бы один элемент e_1

Множество $X \setminus \{e_1\}$ бесконечно, а значит, содержит хотя бы один элемент e_2

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Попробуем доказать такое несложное утверждение:

Утверждение

Во всяком бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество

Доказательство.

В любом бесконечном множестве X содержится хотя бы один элемент e_1

Множество $X \setminus \{e_1\}$ бесконечно, а значит, содержит хотя бы один элемент e_2

Множество $X \setminus \{e_1, e_2\}$ бесконечно, а значит, содержит хотя бы один элемент e_3

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Попробуем доказать такое несложное утверждение:

Утверждение

Во всяком бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество

Доказательство.

В любом бесконечном множестве X содержится хотя бы один элемент e_1

Множество $X \setminus \{e_1\}$ бесконечно, а значит, содержит хотя бы один элемент e_2

Множество $X \setminus \{e_1, e_2\}$ бесконечно, а значит, содержит хотя бы один элемент e_3

Бесконечно продолжая процесс *выбора* элементов e_i, получим требуемое счётное подмножество $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ▼

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

А теперь другое утверждение:

Утверждение

Для любого натурального числа N декартово произведение N непустых множеств непусто

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

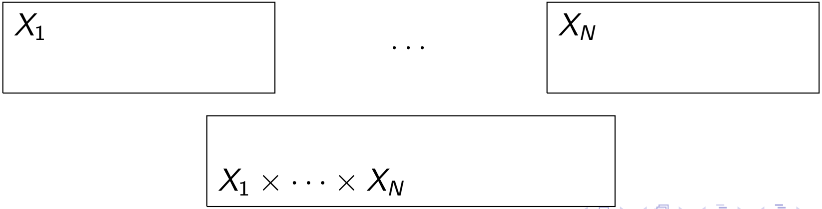
А теперь другое утверждение:

Утверждение

Для любого натурального числа N декартово произведение N непустых множеств непусто

Доказательство.

Рассмотрим произвольные непустые множества $X_1, \dots, X_N$



Интерлюдия: некоторые свойства множеств

А теперь другое утверждение:

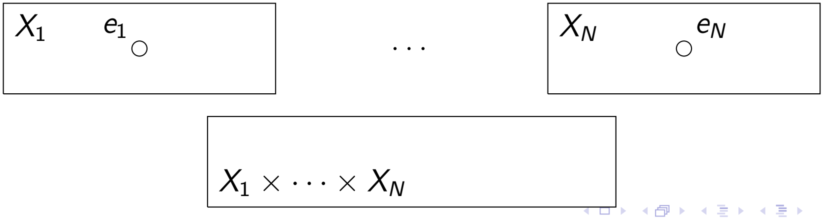
Утверждение

Для любого натурального числа N декартово произведение N непустых множеств непусто

Доказательство.

Рассмотрим произвольные непустые множества $X_1, \ldots, X_N$

Пройдёмся по этим множествам от первого к N-му, и из каждого (i-го) *выберем* элемент e_i



Интерлюдия: некоторые свойства множеств

А теперь другое утверждение:

Утверждение

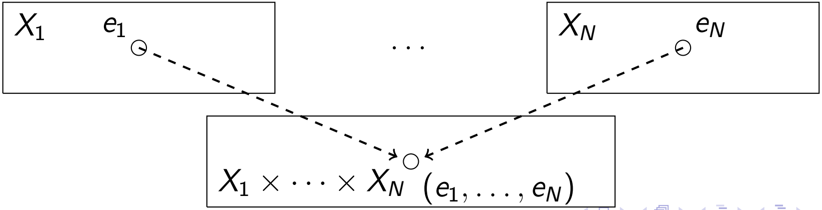
Для любого натурального числа N декартово произведение N непустых множеств непусто

Доказательство.

Рассмотрим произвольные непустые множества $X_1, \ldots, X_N$

Пройдёмся по этим множествам от первого к N-му, и из каждого (i-го) *выберем* элемент e_i

Тогда элемент $(e_1, \ldots, e_N)$ принадлежит декартову произведению $X_1 \times \cdots \times X_N$



Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Например, если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{N}_0} \setminus \{\emptyset\}$, то можно *выбрать* наименьшее число из каждого множества

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Например, если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{N}_0} \setminus \{\emptyset\}$, то можно *выбрать* наименьшее число из каждого множества

А если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{R}}$?

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathbb{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Например, если $\mathbb{X} = 2^{\mathbb{N}_0} \setminus \{\emptyset\}$, то можно *выбрать* наименьшее число из каждого множества

А если $\mathbb{X} = 2^{\mathbb{R}}$?

- наименьшее число из каждого множества выбрать нельзя: его может и не быть

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Например, если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{N}_0} \setminus \{\emptyset\}$, то можно *выбрать* наименьшее число из каждого множества

А если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{R}}$?

- наименьшее число из каждого множества выбрать нельзя: его может и не быть
- пошаговый процесс выбора описать тоже нельзя: множество $|2^{\mathbb{R}}|$ несчётно

Интерлюдия: некоторые свойства множеств

Основа справедливости этих двух утверждений — возможность *выбрать* по одному элементу из каждого множества заданного семейства $\mathtt{X}$ и составить из этих элементов новое множество

А можно ли сделать то же самое в случае **произвольного** семейства множеств?

Например, если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{N}_0} \setminus \{\emptyset\}$, то можно *выбрать* наименьшее число из каждого множества

А если $\mathtt{X} = 2^{\mathbb{R}}$?

- наименьшее число из каждого множества выбрать нельзя: его может и не быть
- пошаговый процесс выбора описать тоже нельзя: множество $|2^{\mathbb{R}}|$ несчётно

Тогда возможность такого *выбора* становится неочевидной

Аксиома выбора

Попробуем сформулировать утверждение о том, что такой *выбор* всегда можно произвести

Аксиома выбора

Попробуем сформулировать утверждение о том, что такой *выбор* всегда можно произвести

Аксиома выбора: для любого семейства `X` непустых множеств существует функция F, сопоставляющая каждому множеству из `X` элемент этого множества

Аксиома выбора

Попробуем сформулировать утверждение о том, что такой *выбор* всегда можно произвести

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция F, сопоставляющая каждому множеству из $\mathtt{X}$ элемент этого множества

$$AC\colon \forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{F}\ (\mathrm{Func}(\mathtt{F})\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathbf{Val}(\mathtt{F}, \mathtt{z}) \in \mathtt{z})))$$

Аксиома выбора

Попробуем сформулировать утверждение о том, что такой *выбор* всегда можно произвести

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция F, сопоставляющая каждому множеству из $\mathtt{X}$ элемент этого множества

$$AC\colon \forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{F}\ (\mathrm{Func}(\mathtt{F})\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathbf{Val}(\mathtt{F}, \mathtt{z}) \in \mathtt{z})))$$

Недостающие определения:

$$\mathrm{D}_{\notin}: \quad \neg \mathtt{x}_1 \in \mathtt{x}_2$$

Аксиома выбора

Попробуем сформулировать утверждение о том, что такой *выбор* всегда можно произвести

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция F, сопоставляющая каждому множеству из $\mathtt{X}$ элемент этого множества

$$AC\colon \forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{F}\ (\mathrm{Func}(\mathtt{F})\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathbf{Val}(\mathtt{F}, \mathtt{z}) \in \mathtt{z})))$$

Недостающие определения:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\notin}: &\quad \neg \mathtt{x}_1 \in \mathtt{x}_2 \\ \mathrm{D}_{\mathrm{Func}}: &\quad \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \to \exists \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \mathtt{z} = \mathrm{Pair}(\mathtt{x}, \mathtt{y})) \end{aligned}$$

Аксиома выбора

Попробуем сформулировать утверждение о том, что такой *выбор* всегда можно произвести

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция F, сопоставляющая каждому множеству из $\mathtt{X}$ элемент этого множества

$$AC\colon \forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{F}\ (\mathrm{Func}(\mathtt{F})\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathbf{Val}(\mathtt{F}, \mathtt{z}) \in \mathtt{z})))$$

Недостающие определения:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\notin}: &\quad \neg \mathtt{x}_1 \in \mathtt{x}_2 \\ \mathrm{D}_{\mathrm{Func}}: &\quad \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \to \exists \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \mathtt{z} = \mathrm{Pair}(\mathtt{x}, \mathtt{y})) \\ &\quad \&\ \forall \mathtt{x}\ \exists! \mathtt{y}\ (\mathrm{Pair}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \in \mathtt{x}_1) \end{aligned}$$

Аксиома выбора

Попробуем сформулировать утверждение о том, что такой *выбор* всегда можно произвести

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция F, сопоставляющая каждому множеству из $\mathtt{X}$ элемент этого множества

$$AC: \forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{F}\ (\mathrm{Func}(\mathtt{F})\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathbf{Val}(\mathtt{F}, \mathtt{z}) \in \mathtt{z})))$$

Недостающие определения:

$$\begin{aligned}
D_{\notin}: &\quad \neg \mathtt{x}_1 \in \mathtt{x}_2 \\
D_{\mathrm{Func}}: &\quad \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \to \exists \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \mathtt{z} = \mathrm{Pair}(\mathtt{x}, \mathtt{y})) \\
&\quad \&\ \forall \mathtt{x}\ \exists! \mathtt{y}\ (\mathrm{Pair}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \in \mathtt{x}_1) \\
D_{\mathrm{Pair}}: &\quad \mathtt{y} = \{\{\mathrm{Un}(\mathtt{x}_1)\}, \{\mathrm{Un}(\mathtt{x}_1), \mathtt{x}_2\}\}
\end{aligned}$$

Аксиома выбора

Попробуем сформулировать утверждение о том, что такой *выбор* всегда можно произвести

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция F, сопоставляющая каждому множеству из $\mathtt{X}$ элемент этого множества

$$AC: \forall \mathtt{X}\,(\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{F}\,(\mathrm{Func}(\mathtt{F})\,\&\,\forall \mathtt{z}\,(\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathbf{Val}(\mathtt{F},\mathtt{z}) \in \mathtt{z})))$$

Недостающие определения:

$$\begin{array}{ll} D_{\notin}: & \neg \mathtt{x}_1 \in \mathtt{x}_2 \\ D_{\mathrm{Func}}: & \forall \mathtt{z}\,(\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \to \exists \mathtt{x}\,\exists \mathtt{y}\;\mathtt{z} = \mathrm{Pair}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \\ & \&\,\forall \mathtt{x}\,\exists! \mathtt{y}\,(\mathrm{Pair}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \in \mathtt{x}_1) \\ D_{\mathrm{Pair}}: & \mathtt{y} = \{\{\mathrm{Un}(\mathtt{x}_1)\},\{\mathrm{Un}(\mathtt{x}_1),\mathtt{x}_2\}\} \\ D_{\mathrm{Un}}: & \mathtt{y} = \{\{\emptyset\},\{\emptyset,\mathtt{x}_1\}\} \end{array}$$

Аксиома выбора

Попробуем сформулировать утверждение о том, что такой *выбор* всегда можно произвести

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция F, сопоставляющая каждому множеству из $\mathtt{X}$ элемент этого множества

$$AC\colon \forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{F}\ (\mathrm{Func}(\mathtt{F})\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathbf{Val}(\mathtt{F}, \mathtt{z}) \in \mathtt{z})))$$

Недостающие определения:

$$\begin{array}{ll}
D_{\notin}: & \neg \mathtt{x}_1 \in \mathtt{x}_2 \\
D_{\mathrm{Func}}: & \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \to \exists \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \mathtt{z} = \mathrm{Pair}(\mathtt{x}, \mathtt{y})) \\
 & \&\ \forall \mathtt{x}\ \exists! \mathtt{y}\ (\mathrm{Pair}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \in \mathtt{x}_1) \\
D_{\mathrm{Pair}}: & \mathtt{y} = \{\{\mathrm{Un}(\mathtt{x}_1)\}, \{\mathrm{Un}(\mathtt{x}_1), \mathtt{x}_2\}\} \\
D_{\mathrm{Un}}: & \mathtt{y} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \mathtt{x}_1\}\} \\
D_{\mathbf{Val}}: & \mathrm{Pair}(\mathtt{x}_2, \mathtt{y}) \in \mathtt{x}_1
\end{array}$$

Аксиома выбора

Попробуем сформулировать утверждение о том, что такой *выбор* всегда можно произвести

Аксиома выбора: для любого семейства $\mathtt{X}$ непустых множеств существует функция F, сопоставляющая каждому множеству из $\mathtt{X}$ элемент этого множества

$$AC: \forall \mathtt{X}\ (\emptyset \notin \mathtt{X} \to \exists \mathtt{F}\ (\mathrm{Func}(\mathtt{F})\ \&\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{X} \to \mathbf{Val}(\mathtt{F}, \mathtt{z}) \in \mathtt{z})))$$

Недостающие определения:

$$\begin{aligned}
D_{\notin}: &\quad \neg \mathtt{x}_1 \in \mathtt{x}_2 \\
D_{\mathrm{Func}}: &\quad \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{z} \in \mathtt{x}_1 \to \exists \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \mathtt{z} = \mathrm{Pair}(\mathtt{x}, \mathtt{y})) \\
&\quad \&\ \forall \mathtt{x}\ \exists! \mathtt{y}\ (\mathrm{Pair}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \in \mathtt{x}_1) \\
D_{\mathrm{Pair}}: &\quad \mathtt{y} = \{\{\mathrm{Un}(\mathtt{x}_1)\}, \{\mathrm{Un}(\mathtt{x}_1), \mathtt{x}_2\}\} \\
D_{\mathrm{Un}}: &\quad \mathtt{y} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \mathtt{x}_1\}\} \\
D_{\mathbf{Val}}: &\quad \mathrm{Pair}(\mathtt{x}_2, \mathtt{y}) \in \mathtt{x}_1
\end{aligned}$$

А насколько правдоподобна аксиома выбора?

Аксиома выбора

Теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC) состоит из аксиом ZF и аксиомы выбора

Аксиома выбора

Теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC) состоит из аксиом ZF и аксиомы выбора

Теорема (Гёдель, 1940)
Если теория ZF непротиворечива, то теория ZFC также непротиворечива

Аксиома выбора

Теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC) состоит из аксиом ZF и аксиомы выбора

Теорема (Гёдель, 1940)
Если теория ZF непротиворечива, то теория ZFC также непротиворечива

Значит, аксиома выбора действительно правдоподобна

Аксиома выбора

Теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC) состоит из аксиом ZF и аксиомы выбора

Теорема (Гёдель, 1940)
Если теория ZF непротиворечива, то теория ZFC также непротиворечива

Значит, аксиома выбора действительно правдоподобна

А может, эта аксиома логически следует из ZF?

Аксиома выбора

Теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC) состоит из аксиом ZF и аксиомы выбора

Теорема (Гёдель, 1940)

Если теория ZF непротиворечива, то теория ZFC также непротиворечива

Значит, аксиома выбора действительно правдоподобна

А может, эта аксиома логически следует из ZF?

ZF¬C — теория, состоящая из аксиом ZF и аксиомы ¬AC

Аксиома выбора

Теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC) состоит из аксиом ZF и аксиомы выбора

Теорема (Гёдель, 1940)
Если теория ZF непротиворечива, то теория ZFC также непротиворечива

Значит, аксиома выбора действительно правдоподобна

А может, эта аксиома логически следует из ZF?

ZF¬C — теория, состоящая из аксиом ZF и аксиомы ¬AC

Теорема (Коэн, 1963)
Если теория ZF непротиворечива, то теория ZF¬C также непротиворечива

Аксиома выбора

Теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC) состоит из аксиом ZF и аксиомы выбора

Теорема (Гёдель, 1940)
Если теория ZF непротиворечива, то теория ZFC также непротиворечива

Значит, аксиома выбора действительно правдоподобна

А может, эта аксиома логически следует из ZF?

ZF¬C — теория, состоящая из аксиом ZF и аксиомы ¬AC

Теорема (Коэн, 1963)
Если теория ZF непротиворечива, то теория ZF¬C также непротиворечива

Значит, возможность выбирать элементы из произвольных семейств множеств ни в каком виде не присутствует в теории Цермело-Френкеля

Интерлюдия: мощности множеств

А насколько просто в теории Цермело-Френкеля рассуждать о мощностях множеств?

Интерлюдия: мощности множеств

А насколько просто в теории Цермело-Френкеля рассуждать о мощностях множеств?

Для начала вернёмся к наивному определению мощности множества

Интерлюдия: мощности множеств

А насколько просто в теории Цермело-Френкеля рассуждать о мощностях множеств?

Для начала вернёмся к наивному определению мощности множества:

мощность множества `X` *— это*
класс всех множеств, равномощных `X`*ы*

Интерлюдия: мощности множеств

А насколько просто в теории Цермело-Френкеля рассуждать о мощностях множеств?

Для начала вернёмся к наивному определению мощности множества:

мощность множества $\mathtt{X}$ — *это*
класс всех множеств, равномощных $\mathtt{X}$*ы*

А класс всех множеств, равномощных заданному — это множество?

Интерлюдия: мощности множеств

А насколько просто в теории Цермело-Френкеля рассуждать о мощностях множеств?

Для начала вернёмся к наивному определению мощности множества:

мощность множества $\mathtt{X}$ *— это*
класс всех множеств, равномощных $\mathtt{X}$*ы*

А класс всех множеств, равномощных заданному — это множество?

А если это множество, то какая у него мощность?

Интерлюдия: мощности множеств

А насколько просто в теории Цермело-Френкеля рассуждать о мощностях множеств?

Для начала вернёмся к наивному определению мощности множества:

мощность множества X *— это*
класс всех множеств, равномощных X*ы*

А класс всех множеств, равномощных заданному — это множество?

А если это множество, то какая у него мощность?

Наивное определение мощности множества оказывается парадоксальным в рамках теории Цермело-Френкеля

Интерлюдия: мощности множеств

А насколько просто в теории Цермело-Френкеля рассуждать о мощностях множеств?

Для начала вернёмся к наивному определению мощности множества:

мощность множества $\mathtt{X}$ *— это*
класс всех множеств, равномощных $\mathtt{X}$*ы*

А класс всех множеств, равномощных заданному — это множество?

А если это множество, то какая у него мощность?

Наивное определение мощности множества оказывается парадоксальным в рамках теории Цермело-Френкеля

Значит, чтобы рассуждать о мощностях множеств в терминах теории Цермело-Френкеля, требуется другое определение мощности

Ординалы

Чтобы рассуждать о мощности множеств в теории Цермело-Френкеля, необходимо определить мощность как некоторое (*хорошее*) множество

Ординалы

Чтобы рассуждать о мощности множеств в теории Цермело-Френкеля, необходимо определить мощность как некоторое (*хорошее*) множество

Попробуем сделать так:

мощность множества $\mathtt{X}$ *— это хорошее множество* $\mathtt{Y}$, *такое что существует биекция* $\mathtt{X} \to \mathtt{Y}$

Ординалы

Чтобы рассуждать о мощности множеств в теории Цермело-Френкеля, необходимо определить мощность как некоторое (*хорошее*) множество

Попробуем сделать так:

мощность множества $\mathtt{X}$ *— это хорошее множество* $\mathtt{Y}$, *такое что существует биекция* $\mathtt{X} \to \mathtt{Y}$

Осталось описать общий вид таких *хороших* множеств

Ординалы

Чтобы рассуждать о мощности множеств в теории Цермело-Френкеля, необходимо определить мощность как некоторое (*хорошее*) множество

Попробуем сделать так:

мощность множества $\mathtt{X}$ *— это хорошее множество* $\mathtt{Y}$,
такое что существует биекция $\mathtt{X} \to \mathtt{Y}$

Осталось описать общий вид таких *хороших* множеств

Множество $\mathtt{X}$ транзитивно, если каждый элемент $\mathtt{X}$ является его подмножеством

Ординалы

Чтобы рассуждать о мощности множеств в теории Цермело-Френкеля, необходимо определить мощность как некоторое (*хорошее*) множество

Попробуем сделать так:

мощность множества X — *это хорошее множество* Y,
такое что существует биекция $X \to Y$

Осталось описать общий вид таких *хороших* множеств

Множество X транзитивно, если каждый элемент X является его подмножеством

Множество X — ординал, если оно и каждый его элемент транзитивны

Ординалы

Примеры ординалов

Ординалы

Примеры ординалов

$\mathbf{0} = \emptyset$

Ординалы

Примеры ординалов

$\mathbf{0} = \emptyset$

$\mathbf{1} = \{\emptyset\}$

Ординалы

Примеры ординалов

$\mathbf{0} = \emptyset$
$\mathbf{1} = \{\emptyset\}$
$\mathbf{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Ординалы

Примеры ординалов

$\mathbf{0} = \emptyset$
$\mathbf{1} = \{\emptyset\}$
$\mathbf{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\mathbf{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Ординалы

Примеры ординалов

$\mathbf{0} = \emptyset$

$\mathbf{1} = \{\emptyset\}$

$\mathbf{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathbf{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\dots$

$\mathbf{n}$

$\dots$

Ординалы

Примеры ординалов

$\mathbf{0} = \emptyset$

$\mathbf{1} = \{\emptyset\}$

$\mathbf{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathbf{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\ldots$

$\mathbf{n}$

$\ldots$

$\omega = \mathbb{N}_0$

Ординалы

Примеры ординалов

$\mathbf{0} = \emptyset$

$\mathbf{1} = \{\emptyset\}$

$\mathbf{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathbf{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\ldots$

$\mathbf{n}$

$\ldots$

$\omega = \mathbb{N}_0$

$\omega + 1 = \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}$

Ординалы

Примеры ординалов

$\mathbf{0} = \emptyset$

$\mathbf{1} = \{\emptyset\}$

$\mathbf{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathbf{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\dots$

$\mathbf{n}$

$\dots$

$\omega = \mathbb{N}_0$

$\omega + 1 = \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}$

$\omega + 2 = \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}\}$

Ординалы

Примеры ординалов

$\mathbf{0} = \emptyset$

$\mathbf{1} = \{\emptyset\}$

$\mathbf{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathbf{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\ldots$

$\mathbf{n}$

$\ldots$

$\omega = \mathbb{N}_0$

$\omega + 1 = \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}$

$\omega + 2 = \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}\}$

$\omega + 3 = \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}, \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0, \{\mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}\}\}\}$

$\ldots$

Ординалы

Примеры ординалов

$\mathbf{0} = \emptyset$

$\mathbf{1} = \{\emptyset\}$

$\mathbf{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathbf{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\ldots$

$\mathbf{n}$

$\ldots$

$\omega = \mathbb{N}_0$

$\omega + 1 = \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}$

$\omega + 2 = \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}\}$

$\omega + 3 = \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}, \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0, \{\mathbb{N}_0 \cup \{\mathbb{N}_0\}\}\}\}$

$\ldots$

$2\omega = ?$

$\ldots$

А какие ещё есть ординалы?

Ординалы

Утверждение: вложенность ординалов

Если X — ординал и $Y \in X$, то Y — ординал

Ординалы

Утверждение: вложенность ординалов

Если X — ординал и $Y \in X$, то Y — ординал

Доказательство.

Множество Y транзитивно:

Любой элемент Z множества Y транзитивен:

Ординалы

Утверждение: вложенность ординалов
Если X — ординал и $Y \in X$, то Y — ординал

Доказательство.
Множество Y *транзитивно:* потому что $Y \in X$ и X — ординал
Любой элемент Z *множества* Y *транзитивен:*

Ординалы

Утверждение: вложенность ординалов

Если X — ординал и $Y \in X$, то Y — ординал

Доказательство.

Множество Y *транзитивно:* потому что $Y \in X$ и X — ординал

Любой элемент Z *множества* Y *транзитивен:*

$Z \in Y$ и $Y \in X$, множество X транзитивно

Ординалы

Утверждение: вложенность ординалов

Если X — ординал и $Y \in X$, то Y — ординал

Доказательство.

Множество Y *транзитивно:* потому что $Y \in X$ и X — ординал

Любой элемент Z *множества* Y *транзитивен:*

$Z \in Y$ и $Y \in X$, множество X транзитивно

Тогда $Z \in X$

Ординалы

Утверждение: вложенность ординалов
Если X — ординал и $Y \in X$, то Y — ординал

Доказательство.
Множество Y *транзитивно:* потому что $Y \in X$ и X — ординал
Любой элемент Z *множества* Y *транзитивен:*
$Z \in Y$ и $Y \in X$, множество X транзитивно
Тогда $Z \in X$, и это означает, что множество Z транзитивно ▼

Ординалы

Утверждение: вложенность ординалов

Если X — ординал и $Y \in X$, то Y — ординал

Доказательство.

Множество Y транзитивно: потому что $Y \in X$ и X — ординал

Любой элемент Z множества Y транзитивен:

$Z \in Y$ и $Y \in X$, множество X транзитивно

Тогда $Z \in X$, и это означает, что множество Z транзитивно ▼

Введём порядок на множестве ординалов:

$$X < Y \qquad \Leftrightarrow \qquad X \in Y$$

Ординалы

Утверждение: вложенность ординалов

Если X — ординал и $Y \in X$, то Y — ординал

Доказательство.

Множество Y *транзитивно:* потому что $Y \in X$ и X — ординал

Любой элемент Z *множества* Y *транзитивен:*

$Z \in Y$ и $Y \in X$, множество X транзитивно

Тогда $Z \in X$, и это означает, что множество Z транзитивно ▼

Введём порядок на множестве ординалов:

$$X < Y \qquad \Leftrightarrow \qquad X \in Y$$

Следствие: индуктивность ординалов

Любой ординал есть объединение всех меньших ординалов:

$$X = \{Y \mid Y < X\}$$

Ординалы

Утверждение: фундированность ординалов

Для любого ординала $\mathtt{X}$ и любой формулы $\varphi(\mathtt{Y})$ множество $\{\mathtt{Y} \mid \mathtt{Y} < \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$ существует и либо пусто, либо имеет минимальный элемент

Ординалы

Утверждение: фундированность ординалов

Для любого ординала $\mathtt{X}$ и любой формулы $\varphi(\mathtt{Y})$ множество $\{\mathtt{Y} \mid \mathtt{Y} < \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$ существует и либо пусто, либо имеет минимальный элемент

Доказательство.

По схеме выделения множество $\{\mathtt{Y} \mid \mathtt{Y} < \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$ существует

Ординалы

Утверждение: фундированность ординалов

Для любого ординала $\mathtt{X}$ и любой формулы $\varphi(\mathtt{Y})$ множество $\{\mathtt{Y} \mid \mathtt{Y} < \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$ существует и либо пусто, либо имеет минимальный элемент

Доказательство.

По схеме выделения множество $\{\mathtt{Y} \mid \mathtt{Y} < \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$ существует

По аксиоме регулярности это множество содержит минимальный элемент (это подробно обсуждалось в лекции 14) ▼

Ординалы

Утверждение: фундированность ординалов
Для любого ординала $\mathtt{X}$ и любой формулы $\varphi(\mathtt{Y})$ множество $\{\mathtt{Y} \mid \mathtt{Y} < \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$ существует и либо пусто, либо имеет минимальный элемент

Доказательство.
По схеме выделения множество $\{\mathtt{Y} \mid \mathtt{Y} < \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$ существует
По аксиоме регулярности это множество содержит минимальный элемент (это подробно обсуждалось в лекции 14) ▼

φ-минимальный ординал, где φ — произвольное свойство, — это ординал $\mathtt{X}$, удовлетворяющий свойству φ и такой что если $\mathtt{Y} < \mathtt{X}$, то ординал $\mathtt{Y}$ не удовлетворяет свойству φ

Ординалы

Утверждение: фундированность ординалов
Для любого ординала $\mathtt{X}$ и любой формулы $\varphi(\mathtt{Y})$ множество $\{\mathtt{Y} \mid \mathtt{Y} < \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$ существует и либо пусто, либо имеет минимальный элемент

Доказательство.
По схеме выделения множество $\{\mathtt{Y} \mid \mathtt{Y} < \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$ существует
По аксиоме регулярности это множество содержит минимальный элемент (это подробно обсуждалось в лекции 14) ▼

φ-минимальный ординал, где φ — произвольное свойство, — это ординал $\mathtt{X}$, удовлетворяющий свойству φ и такой что если $\mathtt{Y} < \mathtt{X}$, то ординал $\mathtt{Y}$ не удовлетворяет свойству φ

По индуктивности и фундированности ординалов, если существует ординал, удовлетворяющий свойству φ, то существует и φ-минимальный ординал

Ординалы

Утверждение: фундированность ординалов

Для любого ординала X и любой формулы $\varphi(Y)$ множество $\{Y \mid Y < X \,\&\, \varphi\}$ существует и либо пусто, либо имеет минимальный элемент

Доказательство.

По схеме выделения множество $\{Y \mid Y < X \,\&\, \varphi\}$ существует

По аксиоме регулярности это множество содержит минимальный элемент (это подробно обсуждалось в лекции 14) ▼

φ-минимальный ординал, где φ — произвольное свойство, — это ординал X, удовлетворяющий свойству φ и такой что если $Y < X$, то ординал Y не удовлетворяет свойству φ

По индуктивности и фундированности ординалов, если существует ординал, удовлетворяющий свойству φ, то существует и φ-минимальный ординал

По аксиоме объёмности такой ординал единственен

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов

$<$ — отношение строгого линейного порядка

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов

$<$ — отношение строгого линейного порядка

Доказательство.

Антирефлексивность:

Транзитивность:

Линейность:

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов

$<$ — отношение строгого линейного порядка

Доказательство.

Антирефлексивность: потому что $\forall x\ x \notin x$

Транзитивность:

Линейность:

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов

$<$ — отношение строгого линейного порядка

Доказательство.

Антирефлексивность: потому что $\forall \mathtt{x}\ \mathtt{x} \notin \mathtt{x}$

(по аксиоме регулярности; подробно обсуждалось в лекции 14)

Транзитивность:

Линейность:

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов
$<$ — отношение строгого линейного порядка

Доказательство.
Антирефлексивность: потому что $\forall x\ x \notin x$
(по аксиоме регулярности; подробно обсуждалось в лекции 14)
Транзитивность: если $x \in y$ и $y \in z$, то по транзитивности ординала z верно $x \in z$
Линейность:

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов

$<$ — отношение строгого линейного порядка

Доказательство.

Антирефлексивность: потому что $\forall \mathtt{x}\ \mathtt{x} \notin \mathtt{x}$

(по аксиоме регулярности; подробно обсуждалось в лекции 14)

Транзитивность: если $\mathtt{x} \in \mathtt{y}$ и $\mathtt{y} \in \mathtt{z}$, то по транзитивности ординала $\mathtt{z}$ верно $\mathtt{x} \in \mathtt{z}$

Линейность: Пусть существуют несравнимые ординалы $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов

$<$ — отношение строгого линейного порядка

Доказательство.

Антирефлексивность: потому что $\forall x\ x \notin x$
(по аксиоме регулярности; подробно обсуждалось в лекции 14)

Транзитивность: если $x \in y$ и $y \in z$, то по транзитивности ординала z верно $x \in z$

Линейность: Пусть существуют несравнимые ординалы X, Y

Рассмотрим φ-минимальный ординал Z для такого свойства:

$$\varphi\colon \exists Y\ \neg(X = Y \lor X < Y \lor Y < X)$$

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов

$<$ — отношение строгого линейного порядка

Доказательство.

Антирефлексивность: потому что $\forall \mathtt{x}\ \mathtt{x} \notin \mathtt{x}$
(по аксиоме регулярности; подробно обсуждалось в лекции 14)

Транзитивность: если $\mathtt{x} \in \mathtt{y}$ и $\mathtt{y} \in \mathtt{z}$, то по транзитивности ординала $\mathtt{z}$ верно $\mathtt{x} \in \mathtt{z}$

Линейность: Пусть существуют несравнимые ординалы $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$
Рассмотрим φ-минимальный ординал $\mathtt{Z}$ для такого свойства:

$$\varphi\colon \exists \mathtt{Y}\ \neg(\mathtt{X} = \mathtt{Y} \vee \mathtt{X} < \mathtt{Y} \vee \mathtt{Y} < \mathtt{X})$$

Рассмотрим ψ-минимальный ординал $\mathtt{U}$ для такого свойства $\mathtt{Y}$:

$$\psi\colon \neg(\mathtt{Z} = \mathtt{Y} \vee \mathtt{Z} < \mathtt{Y} \vee \mathtt{Y} < \mathtt{Z})$$

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов

$<$ — отношение строгого линейного порядка

Доказательство.

Антирефлексивность: потому что $\forall \mathtt{x}\ \mathtt{x} \notin \mathtt{x}$

(по аксиоме регулярности; подробно обсуждалось в лекции 14)

Транзитивность: если $\mathtt{x} \in \mathtt{y}$ и $\mathtt{y} \in \mathtt{z}$, то по транзитивности ординала $\mathtt{z}$ верно $\mathtt{x} \in \mathtt{z}$

Линейность: Пусть существуют несравнимые ординалы $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$

Рассмотрим φ-минимальный ординал $\mathtt{Z}$ для такого свойства:

$$\varphi\colon \exists \mathtt{Y}\ \neg(\mathtt{X} = \mathtt{Y} \vee \mathtt{X} < \mathtt{Y} \vee \mathtt{Y} < \mathtt{X})$$

Рассмотрим ψ-минимальный ординал $\mathtt{U}$ для такого свойства $\mathtt{Y}$:

$$\psi\colon \neg(\mathtt{Z} = \mathtt{Y} \vee \mathtt{Z} < \mathtt{Y} \vee \mathtt{Y} < \mathtt{Z})$$

Тогда любой элемент $\mathtt{u}$ ординала $\mathtt{Z}$ является элементом ординала $\mathtt{U}$, и наоборот

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов

$<$ **— отношение строгого линейного порядка**

Доказательство.

Антирефлексивность: потому что $\forall \mathtt{x}\ \mathtt{x} \notin \mathtt{x}$
(по аксиоме регулярности; подробно обсуждалось в лекции 14)

Транзитивность: если $\mathtt{x} \in \mathtt{y}$ и $\mathtt{y} \in \mathtt{z}$, то по транзитивности ординала $\mathtt{z}$ верно $\mathtt{x} \in \mathtt{z}$

Линейность: Пусть существуют несравнимые ординалы $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$

Рассмотрим φ-минимальный ординал $\mathtt{Z}$ для такого свойства:

$$\varphi\colon \exists \mathtt{Y}\ \neg(\mathtt{X} = \mathtt{Y} \lor \mathtt{X} < \mathtt{Y} \lor \mathtt{Y} < \mathtt{X})$$

Рассмотрим ψ-минимальный ординал $\mathtt{U}$ для такого свойства $\mathtt{Y}$:

$$\psi\colon \neg(\mathtt{Z} = \mathtt{Y} \lor \mathtt{Z} < \mathtt{Y} \lor \mathtt{Y} < \mathtt{Z})$$

Тогда любой элемент $\mathtt{u}$ ординала $\mathtt{Z}$ является элементом ординала $\mathtt{U}$, и наоборот

Значит, $\mathtt{Z} = \mathtt{U}$

Ординалы

Утверждение: линейная упорядоченность ординалов
$<$ — отношение строгого линейного порядка

Доказательство.
Антирефлексивность: потому что $\forall \mathtt{x}\ \mathtt{x} \notin \mathtt{x}$
(по аксиоме регулярности; подробно обсуждалось в лекции 14)
Транзитивность: если $\mathtt{x} \in \mathtt{y}$ и $\mathtt{y} \in \mathtt{z}$, то по транзитивности ординала $\mathtt{z}$ верно $\mathtt{x} \in \mathtt{z}$
Линейность: Пусть существуют несравнимые ординалы $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$
Рассмотрим φ-минимальный ординал $\mathtt{Z}$ для такого свойства:

$$\varphi\colon \exists \mathtt{Y}\ \neg(\mathtt{X} = \mathtt{Y} \vee \mathtt{X} < \mathtt{Y} \vee \mathtt{Y} < \mathtt{X})$$

Рассмотрим ψ-минимальный ординал $\mathtt{U}$ для такого свойства $\mathtt{Y}$:

$$\psi\colon \neg(\mathtt{Z} = \mathtt{Y} \vee \mathtt{Z} < \mathtt{Y} \vee \mathtt{Y} < \mathtt{Z})$$

Тогда любой элемент $\mathtt{u}$ ординала $\mathtt{Z}$ является элементом ординала $\mathtt{U}$, и наоборот
Значит, $\mathtt{Z} = \mathtt{U}$, что невозможно по построению этих ординалов ▼

Арифметика ординалов

Так какие же есть ординалы?

Арифметика ординалов

Так какие же есть ординалы?

Начнём с множеств $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots, \mathbb{N}_0$ — они существуют и являются ординалами

Арифметика ординалов

Так какие же есть ординалы?

Начнём с множеств $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots, \mathbb{N}_0$ — они существуют и являются ординалами

Утверждение. $\mathbf{0}$ — **наименьший ординал**

Доказательство. Очевидно ▼

Арифметика ординалов

Так какие же есть ординалы?

Начнём с множеств $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots, \mathbb{N}_0$ — они существуют и являются ординалами

Утверждение. $\mathbf{0}$ — **наименьший ординал**

Доказательство. Очевидно ▼

Обозначим множество $\mathbb{N}_0$ символом ω

Арифметика ординалов

Так какие же есть ординалы?

Начнём с множеств $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots, \mathbb{N}_0$ — они существуют и являются ординалами

Утверждение. **$\mathbf{0}$ — наименьший ординал**

Доказательство. Очевидно ▼

Обозначим множество $\mathbb{N}_0$ символом ω

α — предельный ординал, если не существует ординала β, такого что $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$

Арифметика ординалов

Так какие же есть ординалы?

Начнём с множеств $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots, \mathbb{N}_0$ — они существуют и являются ординалами

Утверждение. $\mathbf{0}$ **— наименьший ординал**

Доказательство. Очевидно ▼

Обозначим множество $\mathbb{N}_0$ символом ω

α — предельный ординал, если не существует ординала β, такого что $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$

Утверждение. ω **— наименьший предельный ординал**

Доказательство. Очевидно ▼

Арифметика ординалов

Так какие же есть ординалы?

Начнём с множеств $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots, \mathbb{N}_0$ — они существуют и являются ординалами

Утверждение. $\mathbf{0}$ **— наименьший ординал**

Доказательство. Очевидно ▼

Обозначим множество $\mathbb{N}_0$ символом ω

α — предельный ординал, если не существует ординала β, такого что $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$

Утверждение. ω **— наименьший предельный ординал**

Доказательство. Очевидно ▼

Если α — ординал, то записью $\alpha + 1$ обозначим ординал $\alpha \cup \{\alpha\}$

Арифметика ординалов

Определим операцию сложения ординалов:

Арифметика ординалов

Определим операцию сложения ординалов:

- $\alpha + 0 = \alpha$

Арифметика ординалов

Определим операцию сложения ординалов:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma) + 1$, если $\beta = \gamma + 1$

Арифметика ординалов

Определим операцию сложения ординалов:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma) + 1$, если $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha + \beta = \bigcup\limits_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$, если β — предельный ординал

Арифметика ординалов

Определим операцию сложения ординалов:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma) + 1$, если $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha + \beta = \bigcup\limits_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$, если β — предельный ординал

Утверждение: сложение ординалов

Если α и β — ординалы, то $\alpha + \beta$ — ординал

Арифметика ординалов

Определим операцию сложения ординалов:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma) + 1$, если $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha + \beta = \bigcup\limits_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$, если β — предельный ординал

Утверждение: сложение ординалов

Если α и β — ординалы, то $\alpha + \beta$ — ординал

Доказательство.

Если множество $\alpha + \beta$ существует, то оно, очевидно, является ординалом

Арифметика ординалов

Определим операцию сложения ординалов:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma) + 1$, если $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha + \beta = \bigcup\limits_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$, если β — предельный ординал

Утверждение: сложение ординалов

Если α и β — ординалы, то $\alpha + \beta$ — ординал

Доказательство.

Если множество $\alpha + \beta$ существует, то оно, очевидно, является ординалом

Если β не предельный ординал, то существование очевидно

Арифметика ординалов

Определим операцию сложения ординалов:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma) + 1$, если $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha + \beta = \bigcup\limits_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$, если β — предельный ординал

Утверждение: сложение ординалов

Если α и β — ординалы, то $\alpha + \beta$ — ординал

Доказательство.

Если множество $\alpha + \beta$ существует, то оно, очевидно, является ординалом

Если β не предельный ординал, то существование очевидно

Если β — предельный ординал, то существование следует из индуктивности ординалов ($\beta = \{\gamma \mid \gamma < \beta\}$) и схемы преобразования с функцией, преобразующей γ в $\alpha + \gamma$ ▼

Арифметика ординалов

Определим операцию умножения ординалов:

Арифметика ординалов

Определим операцию умножения ординалов:

- $\alpha \cdot 0 = 0$

Арифметика ординалов

Определим операцию умножения ординалов:

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma + \alpha$, если $\beta = \gamma + 1$

Арифметика ординалов

Определим операцию умножения ординалов:

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma + \alpha$, если $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha \cdot \gamma)$, если β — предельный ординал

Арифметика ординалов

Определим операцию умножения ординалов:

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma + \alpha$, если $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha \cdot \beta = \bigcup\limits_{\gamma < \beta} (\alpha \cdot \gamma)$, если β — предельный ординал

Утверждение: умножение ординалов

Если α и β — ординалы, то $\alpha \cdot \beta$ — ординал

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения о сложении ординалов ▼

Арифметика ординалов

Определим операцию степени ординалов:

Арифметика ординалов

Определим операцию степени ординалов:

- $\alpha^0 = 1$

Арифметика ординалов

Определим операцию степени ординалов:

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$, если $\beta = \gamma + 1$

Арифметика ординалов

Определим операцию степени ординалов:

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$, если $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha^\beta = 0$, если β — предельный ординал и $\alpha = 0$

Арифметика ординалов

Определим операцию степени ординалов:

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$, если $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha^\beta = 0$, если β — предельный ординал и $\alpha = 0$
- $\alpha^\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} (\alpha^\gamma)$, если β — предельный ординал и $\alpha > 0$

Арифметика ординалов

Определим операцию степени ординалов:

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$, если $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha^\beta = 0$, если β — предельный ординал и $\alpha = 0$
- $\alpha^\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} (\alpha^\gamma)$, если β — предельный ординал и $\alpha > 0$

Утверждение: степень ординалов
Если α и β — ординалы, то α^β — ординал

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения о сложении ординалов ▼

Арифметика ординалов

А даёт ли арифметика ординалов возможность получить ординалы, которых мы до этого не встречали?

Арифметика ординалов

А даёт ли арифметика ординалов возможность получить ординалы, которых мы до этого не встречали?

Утверждение: сравнение в арифметике ординалов

Для любых ординалов α, β, γ верно:

- $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^\alpha < \gamma^\beta$

Арифметика ординалов

А даёт ли арифметика ординалов возможность получить ординалы, которых мы до этого не встречали?

Утверждение: сравнение в арифметике ординалов
Для любых ординалов α, β, γ верно:

- $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta}$

Доказательство. Это несложно (достаточно для каждого пункта определения операций над ординалами показать принадлежность одного ординала другому) ▼

Арифметика ординалов

А даёт ли арифметика ординалов возможность получить ординалы, которых мы до этого не встречали?

Утверждение: сравнение в арифметике ординалов

Для любых ординалов α, β, γ верно:

- $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^\alpha < \gamma^\beta$

Доказательство. Это несложно (достаточно для каждого пункта определения операций над ординалами показать принадлежность одного ординала другому) ▼

Тогда справедливы будут, например, такие неравенства ординалов:

$4 < \omega$

Арифметика ординалов

А даёт ли арифметика ординалов возможность получить ординалы, которых мы до этого не встречали?

Утверждение: сравнение в арифметике ординалов
Для любых ординалов α, β, γ верно:

- $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^\alpha < \gamma^\beta$

Доказательство. Это несложно (достаточно для каждого пункта определения операций над ординалами показать принадлежность одного ординала другому) ▼

Тогда справедливы будут, например, такие неравенства ординалов:
$4 < \omega < \omega + 7$

Арифметика ординалов

А даёт ли арифметика ординалов возможность получить ординалы, которых мы до этого не встречали?

Утверждение: сравнение в арифметике ординалов
Для любых ординалов α, β, γ верно:

- $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta}$

Доказательство. Это несложно (достаточно для каждого пункта определения операций над ординалами показать принадлежность одного ординала другому) ▼

Тогда справедливы будут, например, такие неравенства ординалов:
$4 < \omega < \omega + 7 < 2 \cdot \omega$

Арифметика ординалов

А даёт ли арифметика ординалов возможность получить ординалы, которых мы до этого не встречали?

Утверждение: сравнение в арифметике ординалов

Для любых ординалов α, β, γ верно:

- $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta}$

Доказательство. Это несложно (достаточно для каждого пункта определения операций над ординалами показать принадлежность одного ординала другому) ▼

Тогда справедливы будут, например, такие неравенства ординалов:

$4 < \omega < \omega + 7 < 2 \cdot \omega < 2 \cdot \omega + 2$

Арифметика ординалов

А даёт ли арифметика ординалов возможность получить ординалы, которых мы до этого не встречали?

Утверждение: сравнение в арифметике ординалов

Для любых ординалов α, β, γ верно:

- $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta}$

Доказательство. Это несложно (достаточно для каждого пункта определения операций над ординалами показать принадлежность одного ординала другому) ▼

Тогда справедливы будут, например, такие неравенства ординалов:

$4 < \omega < \omega + 7 < 2 \cdot \omega < 2 \cdot \omega + 2 < \omega^2 + \omega$

Арифметика ординалов

А даёт ли арифметика ординалов возможность получить ординалы, которых мы до этого не встречали?

Утверждение: сравнение в арифметике ординалов
Для любых ординалов α, β, γ верно:

- $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^\alpha < \gamma^\beta$

Доказательство. Это несложно (достаточно для каждого пункта определения операций над ординалами показать принадлежность одного ординала другому) ▼

Тогда справедливы будут, например, такие неравенства ординалов:

$$4 < \omega < \omega + 7 < 2 \cdot \omega < 2 \cdot \omega + 2 < \omega^2 + \omega < \omega^\omega + \omega^3 + 1$$

Арифметика ординалов

А даёт ли арифметика ординалов возможность получить ординалы, которых мы до этого не встречали?

Утверждение: сравнение в арифметике ординалов

Для любых ординалов α, β, γ верно:

- $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$
- $\alpha < \beta$ **и** $\gamma > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta}$

Доказательство. Это несложно (достаточно для каждого пункта определения операций над ординалами показать принадлежность одного ординала другому) ▼

Тогда справедливы будут, например, такие неравенства ординалов:

$$4 < \omega < \omega + 7 < 2 \cdot \omega < 2 \cdot \omega + 2 < \omega^2 + \omega < \omega^{\omega} + \omega^3 + 1 < \omega^{\omega^3}$$

Арифметика ординалов

А насколько корректно называть введённые операции “арифметикой” и использовать обозначения ноля и единицы?

Арифметика ординалов

А насколько корректно называть введённые операции “арифметикой” и использовать обозначения ноля и единицы?

Утверждение: свойства арифметики ординалов

Для операций над ординалами выполнены некоторые законы арифметики:

- свойства ноля и единицы,
- ассоциативность сложения и умножения,
- дистрибутивность умножения относительно сложения,
- дистрибутивность степени относительно умножения

Арифметика ординалов

А насколько корректно называть введённые операции “арифметикой” и использовать обозначения ноля и единицы?

Утверждение: свойства арифметики ординалов

Для операций над ординалами выполнены некоторые законы арифметики:

- свойства ноля и единицы,
- ассоциативность сложения и умножения,
- дистрибутивность умножения относительно сложения,
- дистрибутивность степени относительно умножения

Доказательство. Это тоже несложно ▼

Арифметика ординалов

Описали ли мы всевозможные ординалы?

Арифметика ординалов

Описали ли мы всевозможные ординалы?

Утверждение

Все ординалы в арифметике, построенной над $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} \ldots, \omega$, счётны

Арифметика ординалов

Описали ли мы всевозможные ординалы?

Утверждение

Все ординалы в арифметике, построенной над $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} \ldots, \omega$, счётны

Доказательство. Очевидно (достаточно пронумеровать элементы ординала, получаемого в результате применения каждой операции) ▼

Арифметика ординалов

Описали ли мы всевозможные ординалы?

Утверждение

Все ординалы в арифметике, построенной над $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} \ldots, \omega$, счётны

Доказательство. Очевидно (достаточно пронумеровать элементы ординала, получаемого в результате применения каждой операции) ▼

При этом существуют и несчётные ординалы

Арифметика ординалов

Описали ли мы всевозможные ординалы?

Утверждение

Все ординалы в арифметике, построенной над $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} \ldots, \omega$, счётны

Доказательство. Очевидно (достаточно пронумеровать элементы ординала, получаемого в результате применения каждой операции) ▼

При этом существуют и несчётные ординалы: например, ординал, получаемый добавлением недостающих элементов в множество $2^{\mathbb{N}_0}$

Арифметика ординалов

А причём здесь мощности множеств?

Арифметика ординалов

А причём здесь мощности множеств?

Теорема Цермело

Для любого множества $\mathtt{X}$ существуют ординал $\mathtt{Y}$ и биекция $f : \mathtt{X} \rightarrow \mathtt{Y}$

Арифметика ординалов

А причём здесь мощности множеств?

Теорема Цермело

Для любого множества $\mathtt{X}$ существуют ординал $\mathtt{Y}$ и биекция $f : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$

Доказательство довольно хитрое, и сейчас я его не привожу; для интересующихся оно появится в слайдах позже

Арифметика ординалов

А причём здесь мощности множеств?

Теорема Цермело

Для любого множества $\mathtt{X}$ существуют ординал $\mathtt{Y}$ и биекция $f : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$

Доказательство довольно хитрое, и сейчас я его не привожу; для интересующихся оно появится в слайдах позже

Что важно знать про эту теорему: она равносильна аксиоме выбора

Арифметика ординалов

А причём здесь мощности множеств?

Теорема Цермело

Для любого множества X существуют ординал Y и биекция $f : X \to Y$

Доказательство довольно хитрое, и сейчас я его не привожу; для интересующихся оно появится в слайдах позже

Что важно знать про эту теорему: она равносильна аксиоме выбора

На основе этой теоремы можно дать следующее определение мощности множества:

мощность множества X — это минимальный ординал $|X|$, для которого существует биекция из множества X

Арифметика ординалов

А причём здесь мощности множеств?

Теорема Цермело

Для любого множества X существуют ординал Y и биекция $f : X \to Y$

Доказательство довольно хитрое, и сейчас я его не привожу; для интересующихся оно появится в слайдах позже

Что важно знать про эту теорему: она равносильна аксиоме выбора

На основе этой теоремы можно дать следующее определение мощности множества:

мощность множества X — это минимальный ординал $|X|$, для которого существует биекция из множества X

Все базовые непротиворечивые факты про мощности множеств без изменений переносятся с наивной теории множеств на теорию Цермело-Френкеля

Континуум-гипотеза

Вернёмся к вопросу, поставленному в лекции 13:

правда ли, что не существует множеств мощности строго между $|\mathbb{N}_0|$ *и* $|2^{\mathbb{N}_0}|$*?*

Континуум-гипотеза

Вернёмся к вопросу, поставленному в лекции 13:

правда ли, что не существует множеств
мощности строго между $|\mathbb{N}_0|$ *и* $|2^{\mathbb{N}_0}|$*?*

Теперь это утверждение можно записать в виде формулы теории множеств:

$$\text{КГ}: \forall \mathtt{X} \; (|\mathtt{X}| < |\mathbf{2}^{\mathbb{N}_\mathbf{0}}| \to |\mathtt{X}| \leq |\mathbb{N}_\mathbf{0}|)$$

Континуум-гипотеза

Вернёмся к вопросу, поставленному в лекции 13:

правда ли, что не существует множеств мощности строго между $|\mathbb{N}_0|$ *и* $|2^{\mathbb{N}_0}|$*?*

Теперь это утверждение можно записать в виде формулы теории множеств:

$$\text{КГ}: \forall \mathtt{X}\ (|\mathtt{X}| < |\mathbf{2}^{\mathbb{N}_\mathbf{0}}| \to |\mathtt{X}| \leq |\mathbb{N}_\mathbf{0}|)$$

Здесь

- $|S|$ — это мощность множества S, то есть минимальный ординал, в который существует биекция из S

Континуум-гипотеза

Вернёмся к вопросу, поставленному в лекции 13:

правда ли, что не существует множеств мощности строго между $|\mathbb{N}_0|$ и $|2^{\mathbb{N}_0}|$?

Теперь это утверждение можно записать в виде формулы теории множеств:

$$\text{КГ}: \forall \mathtt{X}\ (|\mathtt{X}| < |\mathbf{2}^{\mathbb{N}_\mathbf{0}}| \to |\mathtt{X}| \leq |\mathbb{N}_\mathbf{0}|)$$

Здесь

- $|S|$ — это мощность множества S, то есть минимальный ординал, в который существует биекция из S
- $<$ — это синоним для символа $\in$

Континуум-гипотеза

Вернёмся к вопросу, поставленному в лекции 13:

правда ли, что не существует множеств мощности строго между $|\mathbb{N}_0|$ и $|2^{\mathbb{N}_0}|$?

Теперь это утверждение можно записать в виде формулы теории множеств:

$$\text{КГ}: \forall \mathtt{X}\ (|\mathtt{X}| < |\mathbf{2}^{\mathbb{N}_\mathbf{0}}| \to |\mathtt{X}| \leq |\mathbb{N}_\mathbf{0}|)$$

Здесь

- $|S|$ — это мощность множества S, то есть минимальный ординал, в который существует биекция из S
- $<$ — это синоним для символа $\in$
- константу $\mathbb{N}_\mathbf{0}$ несложно определить формулой теории множеств

Континуум-гипотеза

Вернёмся к вопросу, поставленному в лекции 13:

правда ли, что не существует множеств мощности строго между $|\mathbb{N}_0|$ и $|2^{\mathbb{N}_0}|$?

Теперь это утверждение можно записать в виде формулы теории множеств:

$$\text{КГ}: \forall \mathtt{X}\ (|\mathtt{X}| < |\mathbf{2}^{\mathbb{N}_\mathbf{0}}| \to |\mathtt{X}| \leq |\mathbb{N}_\mathbf{0}|)$$

Здесь

- $|S|$ — это мощность множества S, то есть минимальный ординал, в который существует биекция из S
- $<$ — это синоним для символа $\in$
- константу $\mathbb{N}_\mathbf{0}$ несложно определить формулой теории множеств
- операцию $\mathbf{2}^{\cdot}$ также несложно определить формулой теории множеств

Континуум-гипотеза

Что известно про континуум-гипотезу:

Континуум-гипотеза

Что известно про континуум-гипотезу:

Теорема (Гёдель, 1940)
Если теория ZF непротиворечива, то теория $\mathsf{ZFC} \cup \{\mathsf{КГ}\}$ также непротиворечива

Континуум-гипотеза

Что известно про континуум-гипотезу:

Теорема (Гёдель, 1940)
Если теория ZF непротиворечива, то теория $\mathrm{ZFC} \cup \{\text{КГ}\}$ также непротиворечива

Значит, континуум-гипотеза правдоподобна

Континуум-гипотеза

Что известно про континуум-гипотезу:

Теорема (Гёдель, 1940)
Если теория ZF непротиворечива, то теория $\mathsf{ZFC} \cup \{\mathsf{КГ}\}$ также непротиворечива

Значит, континуум-гипотеза правдоподобна

Теорема (Коэн, 1963)
Если теория ZF непротиворечива, то теория $\mathsf{ZFC} \cup \{\neg\mathsf{КГ}\}$ также непротиворечива

Континуум-гипотеза

Что известно про континуум-гипотезу:

Теорема (Гёдель, 1940)
Если теория ZF непротиворечива, то теория $\mathsf{ZFC} \cup \{\mathsf{КГ}\}$ также непротиворечива

Значит, континуум-гипотеза правдоподобна

Теорема (Коэн, 1963)
Если теория ZF непротиворечива, то теория $\mathsf{ZFC} \cup \{\neg \mathsf{КГ}\}$ также непротиворечива

Значит, континуум-гипотеза ***никак не подтверждается и не опровергается*** *аксиомами ZFC*

Конец лекции 15