Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 9

Особенности моделирования систем

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Моделирование программ

Рассмотрим императивную программу π, выполняющуюся в интерпретации $\mathcal{I}$ на произвольном состоянии данных множества X

Модель $M_{\pi,\mathcal{I},X} = (S, S_0, \to, L)$, отвечающая такому выполнению, может быть устроена так:

- S — это множество всех состояний вычисления программы
- $S_0 = \{\langle \pi \mid \sigma \rangle \mid \sigma \in X\}$
- $\to$ — отношение переходов программы, в которое добавлены всевозможные пары вида $\langle \emptyset \mid \sigma \rangle \to \langle \emptyset \mid \sigma \rangle$
- AP — всевозможные связки x/d оценок переменных программы
- $\mathrm{x}/d \in L(\langle \pi' \mid \sigma \rangle) \Leftrightarrow \sigma(\mathrm{x}) = d$

Путями в такой модели Крипке являются трассы программы в $\mathcal{I}$ на σ, $\sigma \in X$

Для других видов программ модель можно устроить точно так же, если определена операционная семантика

Моделирование программ

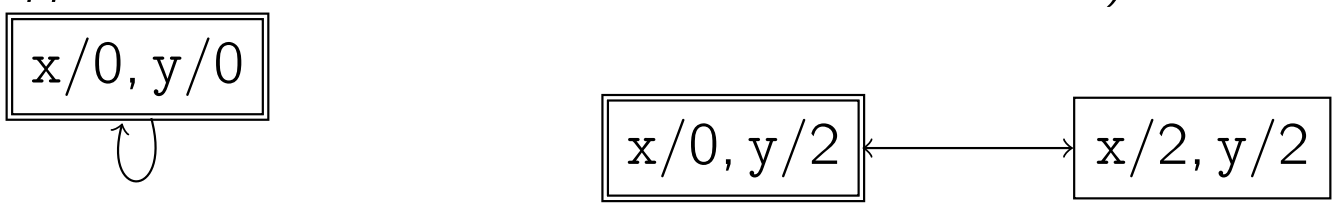
Для примера рассмотрим программу, в которой
бесконечно (в цикле) выполняется присваивание

$$\mathtt{x} := \mathtt{x} + \mathtt{y};,$$

в модели императивных программ с интерпретацией, задающей арифметику двухразрядных чисел с переполнением

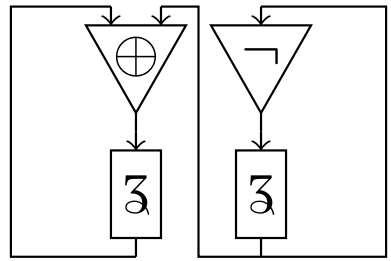
Пусть известно, что в начале работы программы $\mathtt{x} = 0$,
а значение $\mathtt{y}$ может быть любым

Тогда некоторые компоненты связности
соответствующей модели Крипке устроены так
(*можете представить себе и остальные по аналогии*):



Моделирование схем

(*кто знает термин «последовательная схема» — можете представить её вместо схемы из функциональных элементов с задержкой, СФЭЗ*)

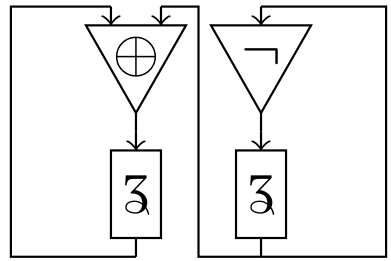


Модель $M = (S, S_0, \to, L)$, отвечающая СФЭЗ (*последовательной схеме*), может быть устроена так:

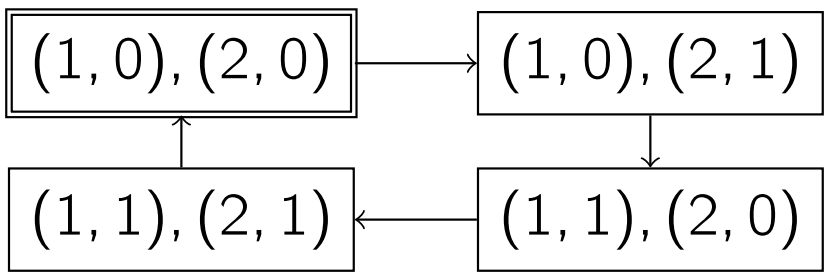
- Все элементы задержки пронумерованы: $1, 2, \ldots, n$
- $S = \{0, 1\}^n$ (*все состояния схемы*)
- $S_0 = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ (*состояние схемы после сброса*)
- $s \to s' \Leftrightarrow$ при переходе к следующему моменту времени (*по переднему фронту тактового сигнала*) возможна такая смена состояния схемы
- $\mathrm{AP} = \{1, 2, \ldots, n\} \times \{0, 1\}$ (*номер и состояние регистра*)
- $(i, b) \in L(b_0, b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow b_i = b$

Моделирование схем

(*кто знает термин «последовательная схема» — можете представить её вместо схемы из функциональных элементов с задержкой, СФЭЗ*)



Например, модель Крипке для этой схемы может быть устроена так:



Моделирование параллелизма

Современные вычислительные системы зачастую состоят из набора компонентов, исполняющихся одновременно (параллельно) и взаимодействующих друг с другом

В зависимости от природы системы, при построении модели используется один из двух видов параллелизма (или их комбинация):

- Асинхронное исполнение (чередующееся исполнение; семантика чередующихся вычислений; interleaving): шаг вычисления системы отвечает одному шагу выполнения **одного** компонента, а остальные компоненты не выполняются
- Синхронное исполнение: шаг вычисления системы отвечает одновременному выполнению шага вычисления **всех** компонентов

Моделирование параллелизма

Параллельная композиция моделей Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$ и $M' = (S', S'_0, \mapsto, L')$ над непересекающимися множествами атомарных высказываний — это модель $M|M' = (S \times S', S_0 \times S'_0, \rightsquigarrow, \mathcal{L})$, где:

- $\mathcal{L}(s, s') = L(s) \cup L'(s')$
- Отношение переходов $\rightsquigarrow$ определяется видом параллелизма

Синхронное исполнение характерно для аппаратных систем,
и других имеющих встроенные средства синхронизации компонентов

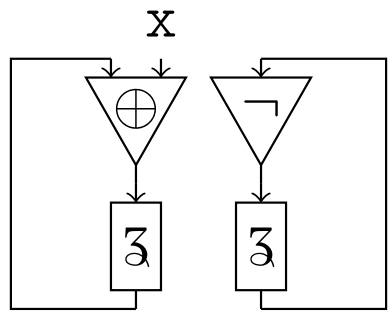
Переходы синхронной композиции моделей
(*без взаимодействия компонентов*) определяются так:

$$(s_1, s'_1) \rightsquigarrow (s_2, s'_2) \quad \Leftrightarrow \quad s_1 \to s_2 \text{ и } s'_1 \mapsto s'_2$$

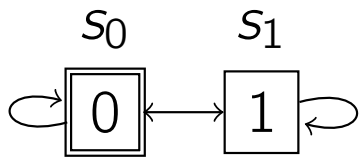
Моделирование параллелизма

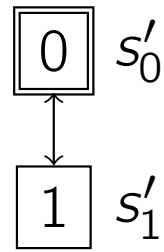
$M = (S, S_0, \to, L)$ $\quad M' = (S', S'_0, \mapsto, L')$ $\quad M|M' = (S \times S', S_0 \times S'_0, \rightsquigarrow, \mathcal{L})$

Например:

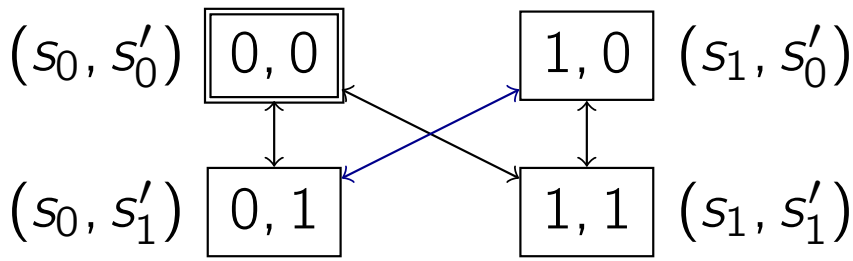


Модели Крипке, описывающие поведение левой и правой задержек:





Синхронная композиция этих моделей:



Моделирование параллелизма

Асинхронное исполнение характерно для систем
без встроенных средств синхронизации компонентов,
в том числе (*с «примесью» синхронности*) для программных систем

Переходы асинхронной композиции моделей
(*без взаимодействия компонентов*) определяются так:

$$(s_1, s_1') \rightsquigarrow (s_2, s_2') \quad \Leftrightarrow \quad (s_1 \to s_2 \text{ и } s_1' = s_2') \text{ или } (s_1 = s_2 \text{ и } s_1' \mapsto s_2')$$

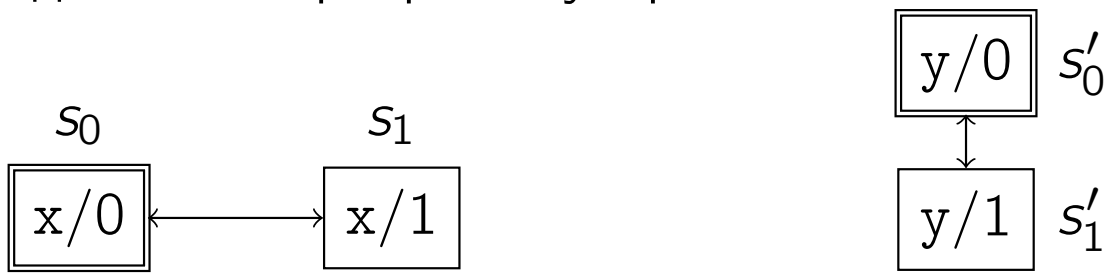
Моделирование параллелизма

Для примера рассмотрим две параллельно работающие программы, в цикле выполняющие одно присваивание:

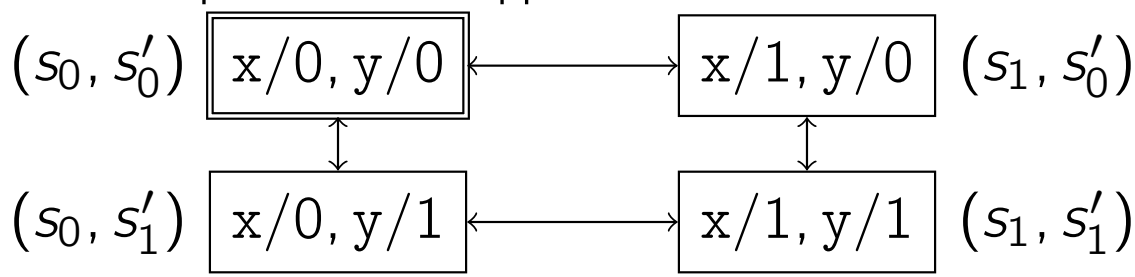
$$\pi_1 : \mathrm{x} := \mathrm{x} + 1; \qquad \pi_2 : \mathrm{y} := \mathrm{y} + 1;$$

Для простоты будем считать, что эти программы выполняются в условиях арифметики одноразрядных чисел с переполнением

Модели Крипке для этих программ устроены так:

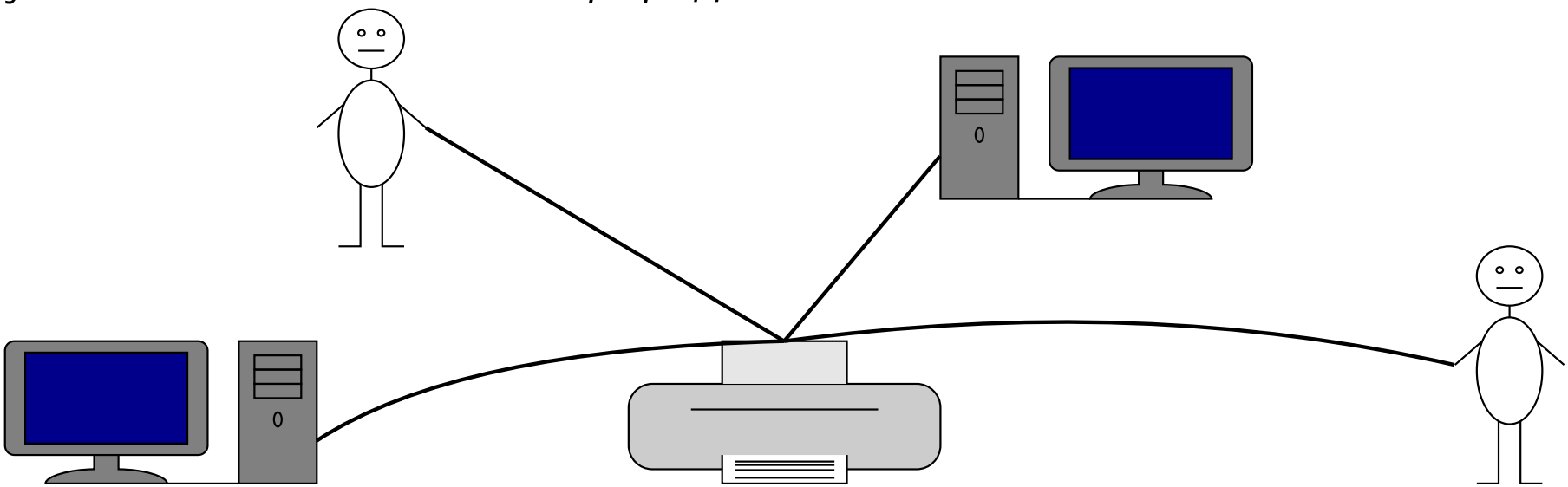


Асинхронная композиция этих моделей:



Моделирование взаимодействия

Пример: с сетевым принтером пытаются взаимодействовать участники *неизвестной природы*



Принтер работает последовательно: принимает информацию и производит печать согласно содержащейся в нём *программе*

Программы остальных участников, *если они есть*, неизвестны

Моделирование взаимодействия

Предположим, что в контроллере принтера
есть однобитовый регистр $\mathtt{R}$, доступный на чтение и запись
всем желающим послать запрос на печать:

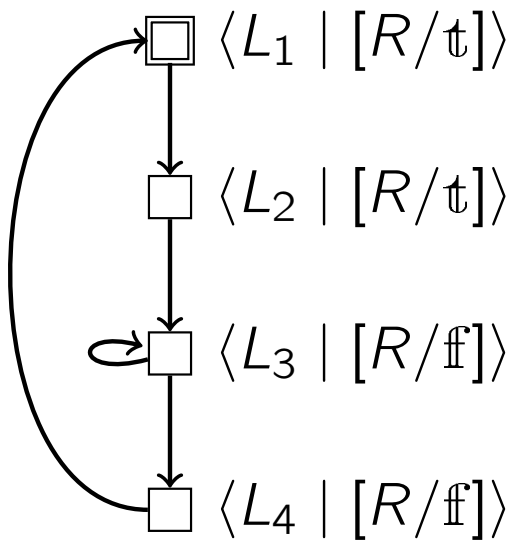
$$\mathtt{R} = \mathtt{t} \Leftrightarrow \text{принтер свободен для печати}$$

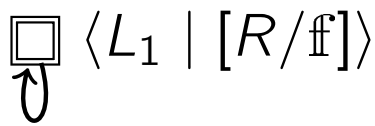
Тогда программу π, посредством которой можно организовать
взаимодействие участника с принтером, можно устроить так:

while $\mathtt{t}$ **do**
$L1:$ **while** $\neg\mathtt{R}$ **do** $\emptyset$ **od**
$L2:$ $\mathtt{R} := \mathtt{f}$;
$L3:$ послать данные для печати
$L4:$ $\mathtt{R} := \mathtt{t}$;
od

Моделирование взаимодействия

Модель Крипке для π: (*функция разметки опущена*)





Моделирование взаимодействия

Программа в вычислительной системе
может взаимодействовать с другими программами:
общие переменные, обмен сообщениями, сигналы, ...

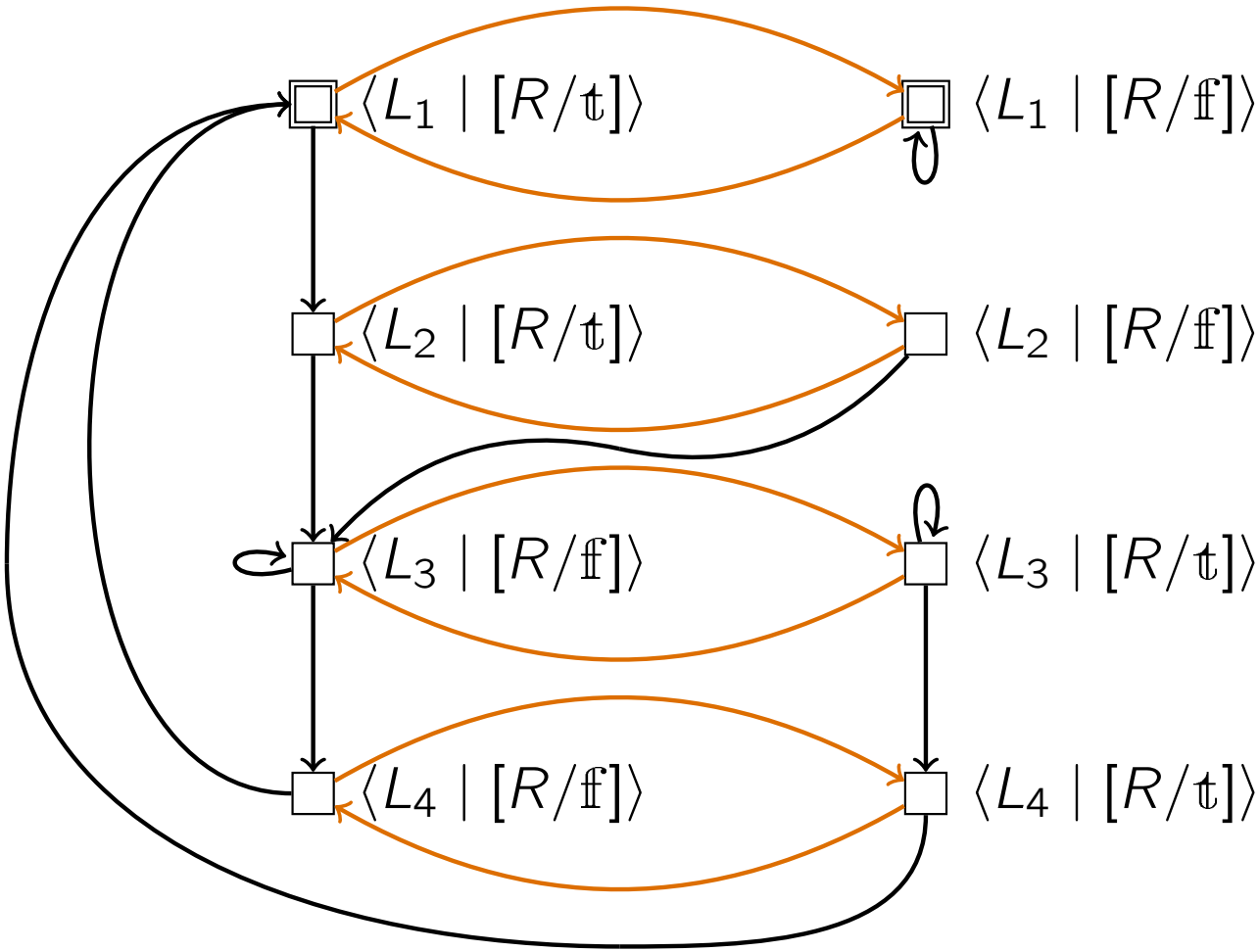
Такое взаимодействие выражается в том, что состояние вычисления программы может измениться под воздействием её **окружения**

Например, регистр `R` в примере может быть изменён любым участником

Чтобы учесть такое изменение, следует добавить в модель Крипке
переходы, отвечающие всем возможностям окружения
повлиять на состояние вычисления программы

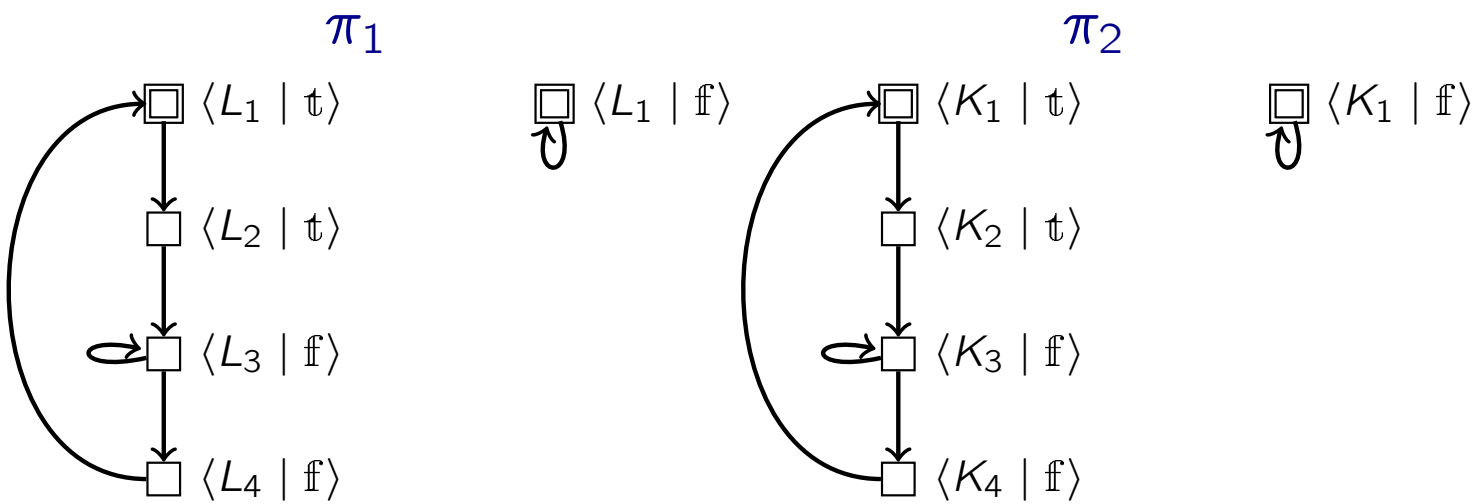
Моделирование взаимодействия

Модель Крипке для программы π с окружением,
способным произвольно переключать значение регистра $\mathtt{R}$:



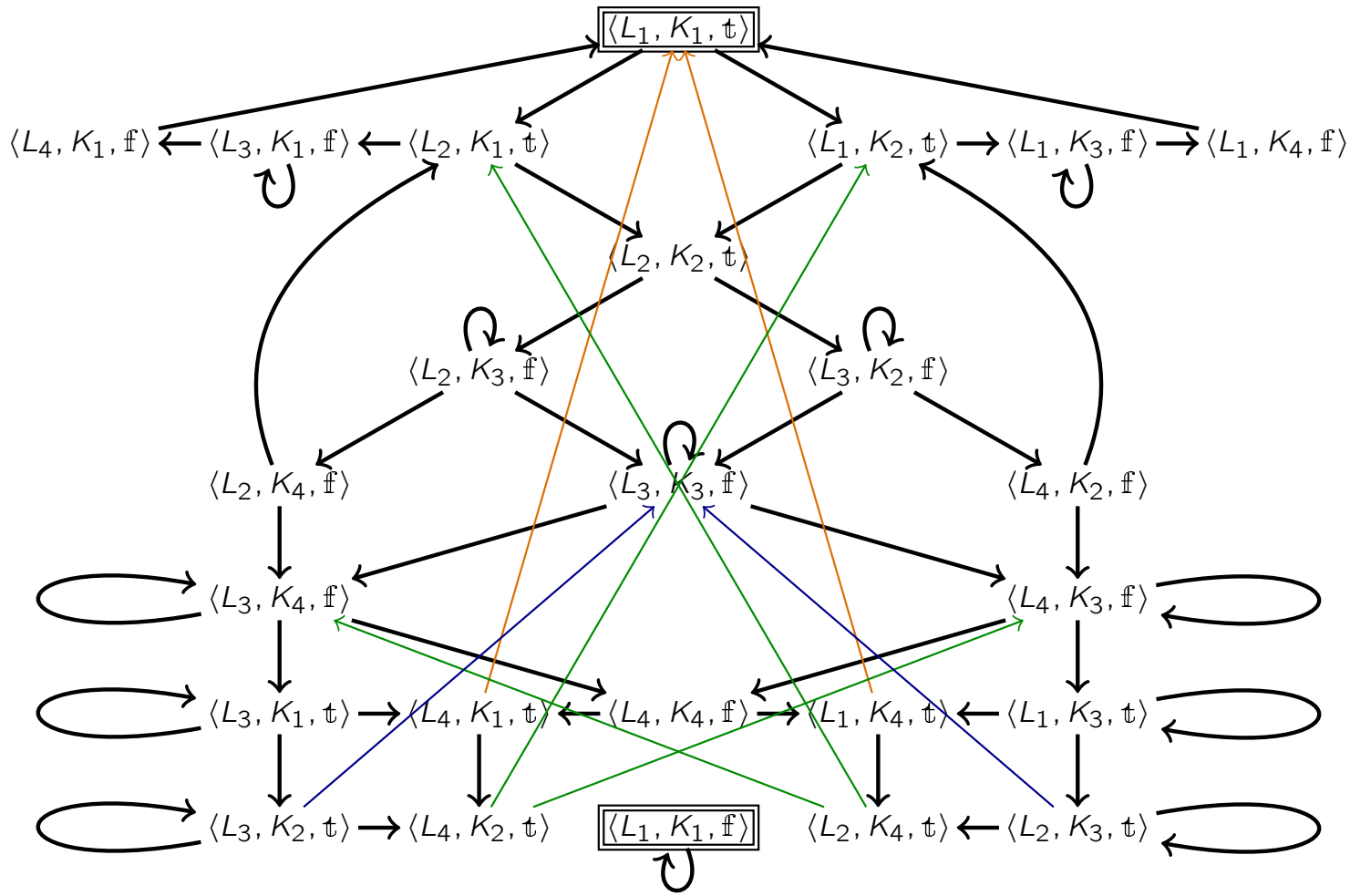
Моделирование взаимодействия

Рассмотрим две (одинаковые) программы взаимодействия с сетевым принтером, выполняющиеся согласно следующим моделям Крипке:



Моделирование взаимодействия

Модель Крипке, описывающая асинхронное исполнение π_1 и π_2 с общим регистром $\mathtt{R}$:



Гранулярность и атомарность в моделях

Переход t в модели отвечает выполнению
атомарного действия системы:

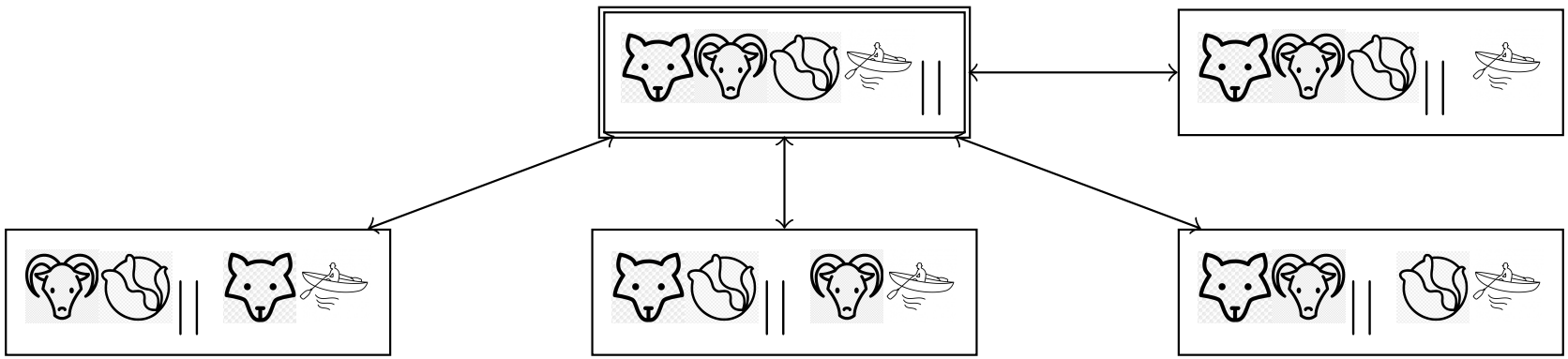
- в выполнение t не могут вмешаться другие действия
- t невозможно или неразумно разделять на более простые действия
- при выполнении t не наблюдаются промежуточные состояния

Выбор гранулярности действий в модели: того, какие именно (насколько детальные или абстрактные) действия будут считаться атомарными — играет важную роль при разработке модели:

- Если действия модели слишком абстрактны, то в модели могут отсутствовать некоторые ошибки, наблюдающиеся при частичном выполнении и «перекрытии» реальных действий
- Если действия модели слишком детальны, то это может
  - существенно увеличить размер модели за счёт несуществующих или «неважных» состояний и из-за этого
  - понизить эффективность верификации

Гранулярность и атомарность в моделях

Например,



Нужно ли рассматривать отдельное действие «плавание по реке»?

А «посадка в лодку» и «высадка из лодки»?

Можно ли посчитать атомарным плавание туда и обратно?

Гранулярность и атомарность в моделях

Другой пример

Рассмотрим две параллельно выполняющиеся программы, каждая из которых выполняет одну команду

$$\pi_1 : \mathtt{x} := \mathtt{x} + \mathtt{y}; \qquad \pi_2 : \mathtt{y} := \mathtt{x} + \mathtt{y};$$

Устроит ли нас, если эти две команды будут считаться атомарными?

Тогда в вычислении системы на $[\mathtt{x}/2, \mathtt{y}/3]$ будут достигаться только состояния данных $[\mathtt{x}/5, \mathtt{y}/3]$, $[\mathtt{x}/5, \mathtt{y}/8]$, $[\mathtt{x}/2, \mathtt{y}/5]$ и $[\mathtt{x}/7, \mathtt{y}/5]$

Но реализация таких присваиваний на языке ассемблера может содержать и более одной команды:

```
load $1, x        load $3, x
load $2, y        load $4, y
add $1, $2        add $3, $4
store $1, x       store $3, y
```

Если атомарными считать ассемблерные команды,
то достижимы и другие состояния данных — например, $[\mathtt{x}/5, \mathtt{y}/5]$ — что может оказаться нежелательным (ошибкой)