Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 9

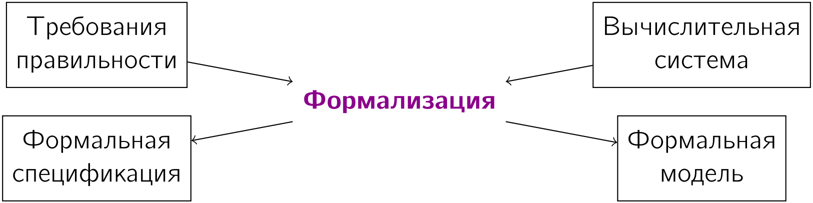
Логика линейного времени (LTL)

Постановка задачи верификации моделей Крипке относительно LTL

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Напоминание



Для моделей Крипке обсудили «лобовой» теоретико-множественный способ задания спецификаций в виде свойств трасс

А на каком языке можно было бы удобно записывать такие свойства?

Пара слов о логике высказываний

Самый простой логический язык записи спецификаций, в сравнении с которым можно объяснять устройство других языков — это язык логики высказываний

Синтаксис формул логики высказываний над множеством атомарных высказываний AP можно задать следующей БНФ:

$$\varphi \ ::= \ \mathbb{t} \ \mid \ p \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi),$$

где $p \in \mathrm{AP}$ и φ — формула

Приоритеты операций, согласно которым можно опускать скобки, по убыванию: $\neg$; $\&$

Операции $\&$ и $\neg$ имеют естественный содержательный смысл: связки «и» и «не» в предложениях

Пара слов о логике высказываний

Другие «обычные» операции могут быть выражены через $\&$ и $\neg$ — например,

- $\psi_1 \vee \psi_2 = \neg(\neg\psi_1 \,\&\, \neg\psi_2)$
  - Содержательный смысл: союз «или» в неисключающем смысле
  - Приоритет операции $\vee$ ниже, чем у $\&$
- $\psi_1 \to \psi_2 = \neg\psi_1 \vee \psi_2$
  - Содержательный смысл: «если-то»
  - Приоритет операции $\to$ ниже, чем у $\vee$

В «ленивом» способе повествования, которого будем придерживаться и в этом курсе, в синтаксисе, семантике и обоснованиях вводится и анализируется «укороченный» синтаксис, но при этом в рассуждениях и примерах в качестве сокращений используется «расширенный» набор операций

Пара слов о логике высказываний

Формула φ выполняется в интерпретации $\mathcal{I} : \mathsf{AP} \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$) в следующих случаях:

- Соотношение $\mathcal{I} \models \mathbb{t}$ выполняется всегда
- $\mathcal{I} \models p \Leftrightarrow \mathcal{I}(p) = \mathbb{t}$
- $\mathcal{I} \models (\psi_1 \,\&\, \psi_2) \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \psi_1$ и $\mathcal{I} \models \psi_2$
- $\mathcal{I} \models (\neg\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{I} \not\models \varphi$

Например, для интерпретации $\mathcal{I}$, такой что $\mathcal{I}(\mathrm{x}) = \mathbb{t}$ и $\mathcal{I}(\mathrm{y}) = \mathbb{f}$, верно следующее:

- $\mathcal{I} \models \mathrm{x}$
- $\mathcal{I} \not\models (\neg x)$
- $\mathcal{I} \not\models \mathrm{y}$
- $\mathcal{I} \models (\neg \mathrm{y})$
- $\mathcal{I} \models (\mathrm{x} \,\&\, \neg \mathrm{y})$
- $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{x} \,\&\, \mathrm{y})$

Темпоральные логики

В логике высказываний выполнимость формулы зависит от и определяется для истинностных значений атомарных высказываний

В темпоральных логиках значения атомарных высказываний могут меняться с течением **времени**, и выполнимость формулы зависит от выбора рассматриваемого момента времени и от взаимосвязи значений атомарных высказываний в различные моменты времени

Операции темпоральной логики — это, как правило, операции логики высказываний с тем же содержательным смыслом, к которым добавлены специальные темпоральные операции, позволяющие рассуждать о взаимосвязи значений высказываний в различные моменты времени

Прежде всего обсудим наиболее известную и популярную логику, предназначенную для записи свойств трасс: логику линейного времени (LTL)

Логика линейного времени

«Укороченный» синтаксис ltl-формул над множеством атомарных высказываний AP задаётся следующей БНФ:

$$\varphi \ ::= \ \mathbb{t} \ \mid \ p \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\mathbf{X}\varphi) \ \mid \ (\varphi\mathbf{U}\varphi),$$

где $p \in AP$ и φ — ltl-формула

Набор операций LTL — то операции логики высказываний, к которым добавлены темпоральные операции

Приоритеты операций по убыванию: $\neg$ и $\mathbf{X}$; затем $\mathbf{U}$; затем остальные операции логики с обычными приоритетами

Моментами времени дальше будем называть неотрицательные целые чи́сла: $0, 1, 2, \ldots$

Понятие выполнимости формул в LTL уточняется так: формула выполняется или не выполняется (*истинна или ложна*) не «абсолютно», а в те или иные моменты времени

Содержательный смысл операций логики высказываний остаётся тем же

Логика линейного времени

Темпоральные операции имеют следующий смысл:

- $\mathbf{X}\varphi$: формула φ выполняется в следующий (*относительно рассматриваемого*) момент времени
- $\psi_1 \mathbf{U} \psi_2$: в будущем когда-нибудь выполнится формула ψ_2, а до тех пор всегда будет выполняться формула ψ_1

В «расширенный» набор операций будем включать также следующие две темпоральные операции:

- $\mathbf{F}\varphi = \mathfrak{t}\mathbf{U}\varphi$
  - Дословное прочтение: в будущем когда-нибудь выполнится формула φ, а до тех пор всегда будет выполняться $\mathfrak{t}$
  - Иными словами: в будущем когда-нибудь выполнится φ
  - Приоритет **F** такой же, как и $\neg$
- $\mathbf{G}\varphi = \neg\mathbf{F}\neg\varphi$
  - Дословное прочтение: неверно то, что когда-нибудь в будущем выполнится формула не-φ
  - Иными словами: в будущем всегда будет выполняться формула φ
  - Приоритет **G** такой же, как и $\neg$

Логика линейного времени

Примеры формул, выражающих требования правильности вычислительных систем:

- Никогда светофоры $\updownarrow$ и $\leftrightarrow$ не будут • одновременно
$$\neg\mathbf{F}(g_{\updownarrow} \,\&\, g_{\leftrightarrow})$$
- Когда-нибудь наступит лето, а до тех пор будет холодно
$$cold\,\mathbf{U}\,summer$$
- Двух подряд плохих дней не бывает:
$$\mathbf{G}(bad\_day \to \mathbf{X}\neg bad\_day)$$
- После • светофор $\updownarrow$ рано или поздно станет •
$$\mathbf{G}(r_{\updownarrow} \to \mathbf{F}g_{\updownarrow})$$
- Светофор $\updownarrow$ бесконечно часто бывает •
$$\mathbf{GF}g_{\updownarrow}$$
- Мне уготована вечность в раю или в аду
$$\mathbf{F}(\mathbf{G}heaven \vee \mathbf{G}hell)$$

Логика линейного времени

Роль интерпретаций для ltl-формул выполняют трассы: событием $\tau[i]$ трассы τ задаются истинностные значения всех атомарных высказываний в момент времени i

Семантика ltl-формул задаётся отношением выполнимости ltl-формулы φ на трассе τ ($\tau \models \varphi$):

- Соотношение $\tau \models \mathbb{t}$ верно всегда
- $\tau \models p$, где $p \in \mathrm{AP} \Leftrightarrow p \in \tau[0]$
- $\tau \models (\psi_1 \,\&\, \psi_2) \Leftrightarrow \tau \models \psi_1$ и $\tau \models \psi_2$
- $\tau \models (\neg\varphi) \Leftrightarrow \tau \not\models \varphi$
- $\tau \models (\mathbf{X}\varphi) \Leftrightarrow \tau^1 \models \varphi$
- $\tau \models (\psi_1 \mathbf{U} \psi_2) \Leftrightarrow$ существует момент времени i, такой что
  - $\tau^i \models \psi_2$ и
  - для любого момента времени j, такого что $j < i$, верно $\tau^j \models \psi_1$

Запись $\tau^m \models \varphi$ можно содержательно трактовать как выполнимость формулы φ на трассе τ в момент времени m

Логика линейного времени

Утверждение (семантика F). **Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:**
$\tau \models \mathbf{F}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **существует момент времени i, такой что $\tau^i \models \varphi$**

Утверждение (семантика G). **Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:**
$\tau \models \mathbf{G}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **для любого момента времени i верно $\tau^i \models \varphi$**

Доказательство. Очевидным образом следует из определений **F** и **G** и семантики ltl-формул

Логика линейного времени

Утверждение. **Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:**

$\tau \models \mathbf{GF}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **для бесконечного числа попарно различных моментов времени i верно $\tau^i \models \varphi$**

Доказательство. Перепишем это утверждение «негативно»:

$\tau \not\models \mathbf{GF}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ для не более чем конечного числа моментов времени i верно $\tau^i \models \varphi$

($\Rightarrow$) Пусть $\tau \not\models \mathbf{GF}\varphi$

По семантике **F** и **G**, верно следующее: существует момент времени k, такой что для любого момента времени m верно $\tau^{k+m} \not\models \varphi$

Значит, соотношение $\tau^i \models \varphi$ выполняется только для $i < k$, то есть для не более чем k моментов времени

($\Leftarrow$) Пусть соотношение $\tau^i \models \varphi$ выполняется для не более чем конечного числа моментов времени i

Рассмотрим наибольший момент времени k, такой что $\tau^k \models \varphi$

Тогда для момента $k' = k + 1$ верно следующее: для любого момента m верно $\tau^{k'+m} \not\models \varphi$

По семантике **F** и **G**, это означает, что $\tau \not\models \mathbf{GF}\varphi$ ▼

Логика линейного времени

Будем говорить, что формула выполняется почти всегда (*более широко — нечто справедливо почти всегда*), если она выполняется во все моменты времени, кроме, быть может, некоторого конечного числа моментов

Утверждение. **Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:**
$\tau \models \mathbf{FG}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **формула φ выполняется на τ почти всегда**

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\tau \models \mathbf{FG}\varphi$

По семантике **F** и **G**, существует момент времени k, такой что для любого момента времени m верно $\tau^{k+m} \models \varphi$

Следовательно, φ выполняется на τ во все моменты времени, кроме, быть может, $\{0, 1, \ldots, k-1\}$

($\Leftarrow$) Пусть формула φ выполняется на τ почти всегда

Рассмотрим наибольший момент времени k, такой что $\tau^k \not\models \varphi$

Тогда для момента времени $k' = k+1$ и любого момента времени m верно $\tau^{k'+m} \models \varphi$

По семантике **F** и **G**, это означает, что $\tau \models \mathbf{FG}\varphi$ ▼

Задача model checking относительно LTL

В блоке 8 для модели Крипке M и свойства трасс P было введено обозначение $M \models P$ того, что модель M удовлетворяет свойству P

Ltl-формула φ может восприниматься как способ представления свойства трасс $\mathrm{Tr}(\varphi) = \{\tau \mid \tau \in \mathrm{Tr}, \tau \models \varphi\}$

Ltl-формула φ выполняется на модели M ($M \models \varphi$), если справедливо включение $\mathrm{Tr}(M) \subseteq \mathrm{Tr}(\varphi)$

Небольшое пояснение:

- Ltl-формула делит все трассы на хорошие (на которых формула выполняется) и плохие (на которых формула не выполняется)
- Соотношение $M \models \varphi$ означает, что все трассы модели M хорошие (т.е. что в модели M нет ни одной плохой трассы)

Задача model checking для LTL (MC-LTL) формулируется так:

Для заданной модели Крипке M и заданной ltl-формулы φ проверить справедливость соотношения

$$M \models \varphi$$