

Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 9

Логика линейного времени (LTL)

Постановка задачи верификации
моделей Крипке относительно LTL

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Напоминание



Для **моделей Крипке** обсудили «лобовой» теоретико-множественный способ задания спецификаций в виде **свойств трасс**

А на каком языке можно было бы удобно записывать такие свойства?

Пара слов о логике высказываний

Самый простой логический язык записи спецификаций, в сравнении с которым можно объяснять устройство других языков — это язык **логики высказываний**

Синтаксис **формул логики высказываний** над множеством **атомарных высказываний** AP можно задать следующей БНФ:

$$\varphi ::= \text{т} \mid p \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\neg \varphi),$$

где $p \in AP$ и φ — формула

Приоритеты операций, согласно которым можно опускать скобки, по убыванию: \neg ; $\&$

Операции $\&$ и \neg имеют естественный содержательный смысл: связки «и» и «не» в предложениях

Пара слов о логике высказываний

Другие «обычные» операции могут быть выражены через $\&$ и \neg — например,

- ▶ $\psi_1 \vee \psi_2 = \neg(\neg\psi_1 \& \neg\psi_2)$
 - ▶ Содержательный смысл: союз «или» в неисключающем смысле
 - ▶ Приоритет операции \vee ниже, чем у $\&$
- ▶ $\psi_1 \rightarrow \psi_2 = \neg\psi_1 \vee \psi_2$
 - ▶ Содержательный смысл: «если-то»
 - ▶ Приоритет операции \rightarrow ниже, чем у \vee

В «ленивом» способе повествования, которого будем придерживаться и в этом курсе, в синтаксисе, семантике и обоснованиях вводится и анализируется «укороченный» синтаксис, но при этом в рассуждениях и примерах в качестве сокращений используется «расширенный» набор операций

Пара слов о логике высказываний

Формула φ выполняется в интерпретации $\mathcal{I} : AP \rightarrow \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$) в следующих случаях:

- ▶ Соотношение $\mathcal{I} \models \mathfrak{t}$ выполняется всегда
- ▶ $\mathcal{I} \models p \Leftrightarrow \mathcal{I}(p) = \mathfrak{t}$
- ▶ $\mathcal{I} \models (\psi_1 \& \psi_2) \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \psi_1$ и $\mathcal{I} \models \psi_2$
- ▶ $\mathcal{I} \models (\neg\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{I} \not\models \varphi$

Например, для интерпретации \mathcal{I} , такой что $\mathcal{I}(x) = \mathfrak{t}$ и $\mathcal{I}(y) = \mathfrak{f}$, верно следующее:

- ▶ $\mathcal{I} \models x$
- ▶ $\mathcal{I} \not\models (\neg x)$
- ▶ $\mathcal{I} \not\models y$
- ▶ $\mathcal{I} \models (\neg y)$
- ▶ $\mathcal{I} \models (x \& \neg y)$
- ▶ $\mathcal{I} \not\models (x \& y)$

Темпоральные логики

В **логике высказываний** выполнимость формулы зависит от и определяется для истинностных значений атомарных высказываний

В **темпоральных логиках** значения атомарных высказываний могут меняться с течением **времени**, и выполнимость формулы зависит от выбора рассматриваемого момента времени и от взаимосвязи значений атомарных высказываний в различные моменты времени

Операции темпоральной логики — это, как правило, операции логики высказываний с тем же содержательным смыслом, к которым добавлены специальные **темпоральные операции**, позволяющие рассуждать о взаимосвязи значений высказываний в различные моменты времени

Прежде всего обсудим наиболее известную и популярную логику, предназначенную для записи **свойств трасс**: **логику линейного времени** (LTL)

Логика линейного времени

«Укороченный» синтаксис **ltl-формул** над множеством **атомарных высказываний** AP задаётся следующей БНФ:

$$\varphi ::= \top \mid p \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\mathbf{X}\varphi) \mid (\varphi \mathbf{U}\varphi),$$

где $p \in AP$ и φ — ltl-формула

Набор операций LTL — то **операции логики высказываний**, к которым добавлены **темпоральные операции**

Приоритеты операций по убыванию: \neg и **X**; затем **U**; затем остальные операции логики с обычными приоритетами

Моментами времени дальше будем называть неотрицательные целые числа: $0, 1, 2, \dots$

Понятие выполнимости формул в LTL уточняется так: формула выполняется или не выполняется (*истинна или ложна*) не «абсолютно», а в те или иные моменты времени

Содержательный смысл операций логики высказываний остаётся тем же

Логика линейного времени

Темпоральные операции имеют следующий смысл:

- ▶ $X\varphi$: формула φ выполняется в следующий (относительно рассматриваемого) момент времени
- ▶ $\psi_1 U \psi_2$: в будущем когда-нибудь выполнится формула ψ_2 , а до тех пор всегда будет выполняться формула ψ_1

В «расширенный» набор операций будем включать также следующие две темпоральные операции:

- ▶ $F\varphi = \top U \varphi$
 - ▶ Дословное прочтение: в будущем когда-нибудь выполнится формула φ , а до тех пор всегда будет выполняться \top
 - ▶ Иными словами: в будущем когда-нибудь выполнится φ
 - ▶ Приоритет **F** такой же, как и \neg
- ▶ $G\varphi = \neg F \neg \varphi$
 - ▶ Дословное прочтение: неверно то, что когда-нибудь в будущем выполнится формула не- φ
 - ▶ Иными словами: в будущем всегда будет выполняться формула φ
 - ▶ Приоритет **G** такой же, как и \neg

Логика линейного времени

Примеры формул, выражающих требования правильности вычислительных систем:

- ▶ Никогда светофоры \updownarrow и \leftrightarrow не будут \bullet одновременно
$$\neg \mathbf{F}(g_{\updownarrow} \ \& \ g_{\leftrightarrow})$$
- ▶ Когда-нибудь наступит лето, а до тех пор будет холодно
$$\mathit{cold} \mathbf{U} \mathit{summer}$$
- ▶ Двух подряд плохих дней не бывает:
$$\mathbf{G}(\mathit{bad_day} \rightarrow \mathbf{X} \neg \mathit{bad_day})$$
- ▶ После \bullet светофор \updownarrow рано или поздно станет \bullet
$$\mathbf{G}(r_{\updownarrow} \rightarrow \mathbf{F} g_{\updownarrow})$$
- ▶ Светофор \updownarrow бесконечно часто бывает \bullet
$$\mathbf{GF} g_{\updownarrow}$$
- ▶ Мне уготована вечность в раю или в аду
$$\mathbf{F}(\mathbf{G} \mathit{heaven} \vee \mathbf{G} \mathit{hell})$$

Логика линейного времени

Роль интерпретаций для ltl-формул выполняют **трассы**: событием $\tau[i]$ трассы τ задаются истинностные значения всех атомарных высказываний в момент времени i

Семантика ltl-формул задаётся **отношением выполнимости** ltl-формулы φ на трассе τ ($\tau \models \varphi$):

- ▶ Соотношение $\tau \models \mathbb{t}$ верно всегда
- ▶ $\tau \models p$, где $p \in AP \Leftrightarrow p \in \tau[0]$
- ▶ $\tau \models (\psi_1 \& \psi_2) \Leftrightarrow \tau \models \psi_1$ и $\tau \models \psi_2$
- ▶ $\tau \models (\neg\varphi) \Leftrightarrow \tau \not\models \varphi$
- ▶ $\tau \models (\mathbf{X}\varphi) \Leftrightarrow \tau^1 \models \varphi$
- ▶ $\tau \models (\psi_1 \mathbf{U} \psi_2) \Leftrightarrow$ существует момент времени i , такой что
 - ▶ $\tau^i \models \psi_2$ и
 - ▶ для любого момента времени j , такого что $j < i$, верно $\tau^j \models \psi_1$

Запись $\tau^m \models \varphi$ можно содержательно трактовать как выполнимость формулы φ на трассе τ **в момент времени m**

Логика линейного времени

Утверждение (семантика F). Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:

$$\tau \models \mathbf{F}\varphi \Leftrightarrow \text{существует момент времени } i, \text{ такой что } \tau^i \models \varphi$$

Утверждение (семантика G). Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:

$$\tau \models \mathbf{G}\varphi \Leftrightarrow \text{для любого момента времени } i \text{ верно } \tau^i \models \varphi$$

Доказательство. Очевидным образом следует из определений **F** и **G** и семантики ltl-формул

Логика линейного времени

Утверждение. Для любых ltl-формулы φ и трассы τ верно:
 $\tau \models \mathbf{GF}\varphi \Leftrightarrow$ для бесконечного числа попарно различных моментов времени i верно $\tau^i \models \varphi$

Доказательство. Перепишем это утверждение «негативно»:

$\tau \not\models \mathbf{GF}\varphi \Leftrightarrow$ для не более чем конечного числа моментов времени i верно $\tau^i \models \varphi$

(\Rightarrow) Пусть $\tau \not\models \mathbf{GF}\varphi$

По семантике **F** и **G**, верно следующее: существует момент времени k , такой что для любого момента времени m верно $\tau^{k+m} \not\models \varphi$

Значит, соотношение $\tau^i \models \varphi$ выполняется только для $i < k$, то есть для не более чем k моментов времени

(\Leftarrow) Пусть соотношение $\tau^i \models \varphi$ выполняется для не более чем конечного числа моментов времени i

Рассмотрим наибольший момент времени k , такой что $\tau^k \models \varphi$

Тогда для момента $k' = k + 1$ верно следующее: для любого момента m верно $\tau^{k'+m} \not\models \varphi$

По семантике **F** и **G**, это означает, что $\tau \not\models \mathbf{GF}\varphi \blacktriangledown$

Логика линейного времени

Будем говорить, что формула выполняется **почти всегда** (более широко — нечто справедливо почти всегда), если она выполняется во все моменты времени, кроме, быть может, некоторого конечного числа моментов

Утверждение. Для любых **ltl**-формулы φ и трассы τ верно:

$\tau \models \mathbf{FG}\varphi \Leftrightarrow$ формула φ выполняется на τ почти всегда

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть $\tau \models \mathbf{FG}\varphi$

По семантике **F** и **G**, существует момент времени k , такой что для любого момента времени m верно $\tau^{k+m} \models \varphi$

Следовательно, φ выполняется на τ во все моменты времени, кроме, быть может, $\{0, 1, \dots, k-1\}$

(\Leftarrow) Пусть формула φ выполняется на τ почти всегда

Рассмотрим наибольший момент времени k , такой что $\tau^k \not\models \varphi$

Тогда для момента времени $k' = k + 1$ и любого момента времени m верно $\tau^{k'+m} \models \varphi$

По семантике **F** и **G**, это означает, что $\tau \models \mathbf{FG}\varphi \blacktriangledown$

Задача model checking относительно LTL

В блоке 8 для модели Крипке M и свойства трасс P было введено обозначение $M \models P$ того, что модель M удовлетворяет свойству P

Ltl-формула φ может восприниматься как способ представления свойства трасс $\text{Tr}(\varphi) = \{\tau \mid \tau \in \text{Tr}, \tau \models \varphi\}$

Ltl-формула φ выполняется на модели M ($M \models \varphi$), если справедливо включение $\text{Tr}(M) \subseteq \text{Tr}(\varphi)$

Небольшое пояснение:

- ▶ Ltl-формула делит все трассы на хорошие (на которых формула выполняется) и плохие (на которых формула не выполняется)
- ▶ Соотношение $M \models P$ означает, что все трассы модели M хорошие (т.е. что в модели M нет ни одной плохой трассы)

Задача model checking для LTL (MC-LTL) формулируется так:

Для заданной модели Крипке M и заданной ltl-формулы φ
проверить справедливость соотношения

$$M \models \varphi$$