

Лекция 7. Подгруппы. Смежные классы, индекс подгруппы в группе. Теорема Лагранжа о порядке подгруппы конечной группы. Нормальные подгруппы. Фактор-группы. Действие группы на множестве. Орбита и стабилизатор элемента. Лемма Бернсайда.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.su

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.su>

## Смежные классы

Пусть  $G = (S; *)$  — группа, а  $H = (T; *)$ ,  $T \subseteq S$ , — ее подгруппа.

Определим на множестве  $S$  бинарное отношение  $R_H$ : если  $a, b \in S$ , то

$$aR_H b \Leftrightarrow \exists h \in H : a * h = b.$$

Заметим, что отношение  $R_H$  можно задавать так: если  $a, b \in S$ , то

$$aR_H b \Leftrightarrow a' * b \in H,$$

где элемент  $a'$  симметричен элементу  $a$  в группе  $G$ .

## Отношение эквивалентности по подгруппе

**Утверждение 1.** *Отношение  $R_H$  является отношением эквивалентности на множестве  $S$ .*

**Доказательство.** Свойства отношения эквивалентности.

1) Рефлексивность. Для каждого  $a \in S$  выберем  $e \in H$  — нейтральный элемент. Тогда  $a * e = a$ , поэтому  $aR_H a$ .

2) Симметричность. Пусть для элементов  $a, b \in S$  верно  $aR_H b$ , т. е. найдется такой элемент  $h \in H$ , что  $a * h = b$ . Тогда

$$a * h = b, a * h * h' = b * h', a = b * h'.$$

Т. к.  $H$  — группа,  $h' \in H$ . Поэтому  $bR_H a$ .

3) Транзитивность. Пусть для элементов  $a, b, c \in S$  верно  $aR_H b$  и  $bR_H c$ , т. е. найдутся такие элементы  $h_1 \in H$  и  $h_2 \in H$ , что  $a * h_1 = b$  и  $b * h_2 = c$ . Тогда

$$a * (h_1 * h_2) = (a * h_1) * h_2 = b * h_2 = c.$$

Т. к.  $H$  — группа,  $h_1 * h_2 = h \in H$ . Поэтому  $aR_H c$ .

## Смежные классы

Класс эквивалентности множества  $S$  по отношению эквивалентности  $R_H$  называется **левым смежным классом** группы  $G$  по подгруппе  $H$ .

Обозначение: левый смежный класс, порожденный элементом  $a \in S$ :

$$aH = \{b \in S \mid \exists h \in H : a * h = b\}.$$

В аддитивной символике обозначение:

$$a + H = \{b \in S \mid \exists h \in H : a + h = b\}.$$

Напомним, что классы эквивалентности или не пересекаются, или совпадают. Поэтому отношение  $R_H$  **разбивает** множество  $S$  на левые смежные классы. Такое разбиение называется **левосторонним разложением** группы  $G$  по подгруппе  $H$ .

Аналогично вводится **правостороннее разложение** группы  $G$  по подгруппе  $H$ .

## Смежные классы

Пусть  $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_m\}$  — конечная подгруппа группы  $G = (S; *)$ .

Тогда для каждого элемента  $a \in S$  левый смежный класс

$$aH = \{a * h_1, a * h_2, \dots, a * h_m\}$$

также содержит конечное число элементов.

**Пример.** Найдём левостороннее разложение симметрической группы перестановок  $S_3$  по подгруппе  $H$  вращений правильного треугольника в плоскости.

Напомним, подгруппа

$$H = \{e = (1)(2)(3), (123), (132)\}.$$

Тогда

$$eH = H = \{e = (1)(2)(3), (123), (132)\};$$

$$(1)(23)H = \{(1)(23), (12)(3), (13)(2)\}.$$

## Смежные классы

**Утверждение 2.** В каждом левом (правом) смежном классе группы по конечной подгруппе число элементов совпадает с порядком этой подгруппы.

**Доказательство.** Пусть  $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_m\}$  — конечная подгруппа группы  $G = (S; *)$ .

Тогда для элемента  $a \in S$  левый смежный класс  $aH$  состоит из элементов вида

$$a * h_1, a * h_2, \dots, a * h_m.$$

Поэтому  $|aH| \leq |H|$ .

Предположим, что  $|aH| < |H|$ . т. е. найдутся такие элементы  $h_i, h_j \in H$ ,  $h_i \neq h_j$ , что

$$a * h_i = a * h_j.$$

Тогда по правилу сокращения  $h_i = h_j$  — противоречие.

Следовательно,  $|aH| = |H|$ .

# Теорема Лагранжа

**Следствие 2.1 (теорема Лагранжа).** *Порядок каждой подгруппы конечной группы делит порядок группы.*

**Доказательство.** Пусть  $G = (S; *)$  — конечная группа, а  $H$  — ее подгруппа. Рассмотрим левостороннее разложение группы  $G$  по подгруппе  $H$ . Тогда все левые смежные классы равномощны, и их мощность равна порядку подгруппы  $H$ . Каждый элемент множества  $S$  лежит ровно в одном левом смежном классе, поэтому

$$|G| = |H| \cdot \{\text{число левых смежных классов}\}.$$

Поэтому  $|H| \mid |G|$ . □

# Порядок элемента конечной группы

**Следствие 2.2.** *Порядок каждого элемента конечной группы делит порядок группы.*

**Доказательство.** Пусть  $G = (S; *)$  — конечная группа, и  $a \in S$  — какой-то ее элемент. Достаточно рассмотреть циклическую ее подгруппу  $H = \langle a \rangle$  с образующим элементом  $a \in S$ . Тогда порядок элемента  $a$  равен порядку группы  $H$ , а значит, делит порядок группы  $G$ . □



# Индекс подгруппы в группе

Число смежных классов конечной группы  $G$  по подгруппе называется **индексом подгруппы  $H$  в группе  $G$**  и обозначается как  $(G : H)$ .

**Следствие 2.3.** *Порядок конечной группы равен произведению порядка какой-то ее подгруппы на индекс этой подгруппы в группе, т. е.*

$$|G| = |H| \cdot (G : H),$$

где  $G$  — конечная группа, а  $H$  — ее подгруппа.

## Пример: все неизоморфные группы из 5 элементов

**Пример.** Найдем все возможные группы из 5 элементов (с точностью до изоморфизма).

**Решение.** Пусть  $|S| = 5$ , и  $G = (S; *)$  — группа.

Если  $a \in S$ , то порядок элемента  $a$  делит порядок группы, т. е. делит 5.

Т. е. каждый элемент этой группы имеет порядок или 1, или 5. Но порядок 1 может иметь только нейтральный элемент  $e$ .

Значит, все другие элементы имеют порядок 5. Т. е. эта группа циклическая, и

$$S = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5 = e\}.$$

Следовательно, с точностью до изоморфизма существует только **одна** группа из 5 элементов, и она является циклической.

Несложно заметить, что это группа вращений правильного пятиугольника в плоскости.

# Нормальные подгруппы

Пусть  $G = (S; *)$  — группа, а  $H = (T; *)$ ,  $T \subseteq S$ , — ее подгруппа.

Подгруппа  $H$  называется **нормальной подгруппой** (или **нормальным делителем**) группы  $G$ , если для каждого элемента  $a \in S$  его левые и правые смежные классы совпадают, т. е. если

$$\forall a \in S \quad aH = Ha.$$

Заметим, что каждая подгруппа коммутативной группы нормальна.

Если подгруппа  $H$  нормальна в группе  $G$ , то левостороннее и правостороннее разложения группы  $G$  по подгруппе  $H$  совпадают.

# Критерий нормальности подгруппы

**Утверждение 3 (критерий нормальности подгруппы).**

*Подгруппа  $H = (T; *)$  является нормальной подгруппой группы  $G = (S, *)$  тогда и только тогда, когда для каждого элемента  $a \in S$  для любого элемента  $h \in H$  верно*

$$a' * h * a \in H,$$

*где элемент  $a'$  симметричен к элементу  $a$  в группе  $G$ .*

# Критерий нормальности подгруппы

**Доказательство.**

$\Rightarrow$ . Если для каждого элемента  $a \in S$  верно  $aH = Ha$ , то для любого элемента  $h \in H$  найдется такой элемент  $h_1 \in H$ , что

$$a * h_1 = h * a.$$

Получаем:

$$a' * (a * h_1) = a' * (h * a), \quad h_1 = a' * h * a.$$

Т.е.  $a' * h * a \in H$ .

# Критерий нормальности подгруппы

**Доказательство.**

$\Leftarrow$ . Если для каждого элемента  $a \in S$  для любого элемента  $h \in H$  верно  $a' * h * a \in H$ , то

$$a' * h * a = h_1 \in H.$$

Получаем:

$$a * (a' * h * a) = a * h_1, \quad h * a = a * h_1.$$

т. е.  $Ha \subseteq aH$ .

Включение  $aH \subseteq Ha$  доказывается аналогично, рассматривая произведение  $(a')' * h * a'$ ,  $a' \in S$ .

Поэтому  $aH = Ha$ .



# Нормальные подгруппы в $S_n$

**Пример.** Докажем, что группа  $H$  вращений правильного треугольника в плоскости является нормальной подгруппой группы  $S_3$ .

Напомним, что группа

$$S_3 = \{e = (1)(2)(3), (1)(23), (12)(3), (13)(2), (123), (132)\},$$

и подгруппа

$$H = \{(1)(2)(3), (123), (132)\}.$$

Тогда

$$eH = H = \{(1)(2)(3), (123), (132)\} = He$$

и

$$(1)(23)H = \{(1)(23), (12)(3), (13)(2)\} = H(1)(23).$$

Т. е. подгруппа  $H$  — нормальная подгруппа группы  $S_3$ .

# Фактор-группа

Пусть  $G = (S; *)$  — группа, и  $N = (T; *)$  — ее **нормальная** подгруппа.

Рассмотрим разложение группы  $G$  по нормальной подгруппе  $N$ .

Введем операцию умножения смежных классов: если элементы  $a, b \in S$ , то

$$(aN)(bN) = (ab)N.$$



# Фактор-группа

**Утверждение 4.** Если  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G = (S; *)$ , то введенная выше операция умножения смежных классов корректна.

**Доказательство.** Пусть  $a, b \in S$  и  $a_1 \in aN$  и  $b_1 \in bN$ .  
Докажем, что

$$(a_1 N)(b_1 N) = (aN)(bN) = (ab)N,$$

т. е. что результат операции не зависит от выбора элементов, по которым строятся смежные классы.

# Фактор-группа

**Доказательство.** Пусть  $h \in N$ . Покажем, что найдется элемент  $x \in N$ , являющийся решением уравнения

$$a * b * h = a_1 * b_1 * x.$$

Т. к.  $a_1 \in aN$ ,  $b_1 \in bN$ , найдутся такие элементы  $h_1, h_2 \in N$ , что  $a_1 = a * h_1$ ,  $b_1 = b * h_2$ . Тогда

$$a * b * h = a_1 * b_1 * x = a * h_1 * b * h_2 * x, \quad b * h = h_1 * b * h_2 * x.$$

Т. к.  $N$  — нормальная подгруппа, найдется такой элемент  $h_3 \in N$ , что  $h_1 * b = b * h_3$ . Поэтому

$$b * h = h_1 * b * h_2 * x = b * h_3 * h_2 * x, \quad h = h_3 * h_2 * x.$$

Значит,  $x = h'_2 * h'_3 * h \in N$ , где элементы  $h'_2, h'_3 \in N$  симметричны соответственно к элементам  $h_2, h_3 \in N$ .



## Фактор-группа

**Утверждение 5.** Если  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G = (S; *)$ , то множество смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $N$  с операцией их умножения образует группу.

**Доказательство.** Свойства группы.

- 1) Ассоциативность операции умножения: следует из ассоциативности операции  $*$  в группе  $G$ .
- 2) Существование нейтрального элемента:  $eN = N$ , где  $e \in S$  — нейтральный элемент группы  $G$ .
- 3) Для каждого элемента  $aN$ , где  $a \in S$ , существование симметричного элемента:  $a'N$ , где элемент  $a' \in S$  симметричен к элементу  $a$  в группе  $G$ .

□

Группа смежных классов группы  $G$  по нормальной ее подгруппе  $N$  с операцией их умножения называется **фактор-группой** группы  $G$  по подгруппе  $N$  и обозначается  $G/N$ .

# Фактор-группа

**Утверждение 6.** *Порядок фактор-группы  $G/N$  конечной группы  $G$  по ее нормальной подгруппе  $N$  равен индексу подгруппы  $N$  в группе  $G$ , т. е.*

$$|G/N| = (G : N) = \frac{|G|}{|N|}.$$

## Фактор-группа

**Пример.** Найдем фактор-группу  $S_3/H$  группы  $S_3$  по нормальной подгруппе  $H$  вращений правильного треугольника в плоскости.

Тогда фактор-группа

$$S_3/H = (\{eH, (1)(23)H\}, \cdot),$$

где

$$eH = H = \{(1)(2)(3), (123), (132)\},$$

и

$$(1)(23)H = \{(1)(23), (12)(3), (13)(2)\}.$$

В фактор-группе  $S_3/H$  верно

$$eH \cdot X = X \cdot eH = X, \text{ при } X = eH, (1)(23)H;$$

$$(1)(23)H \cdot (1)(23)H = eH.$$

т. е. фактор-группа  $S_3/H$  изоморфна группе  $S_2$ .

# Действие группы перестановок

Пусть  $G$  — подгруппа симметрической группы перестановок  $S_n$ .  
Напомним, что  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Будем говорить, что группа перестановок  $G$  действует на множестве  $N$ .

При этом при действии элемента  $\pi \in G$  элемент  $a \in N$  переходит в элемент  $\pi(a) \in N$ .

# Эквивалентность по группе перестановок

Пусть  $G$  — подгруппа симметрической группы перестановок  $S_n$ ,  
 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Определим бинарное отношение  $R_G$  на множестве  $N$ : если  
 $a, b \in N$ , то

$$aR_G b \Leftrightarrow \exists \pi \in G : \pi(a) = b.$$

# Эквивалентность по группе перестановок

**Утверждение 7.** *Отношение  $R_G$  является отношением эквивалентности на множестве  $N$ .*

**Доказательство.** Свойства отношения эквивалентности.

1) Рефлексивность. Для каждого элемента  $a \in N$  выберем  $\pi_1 = e \in G$  — тождественную перестановку. Тогда  $\pi_1(a) = a$ , поэтому  $aR_G a$ .

2) Симметричность. Пусть для элементов  $a, b \in N$  верно  $aR_G b$ , т. е. найдется такая перестановка  $\pi \in G$ , что  $\pi(a) = b$ . Тогда

$$\pi(a) = b, \pi^{-1}(\pi(a)) = \pi^{-1}(b), a = \pi^{-1}(b).$$

Т. к.  $G$  — группа,  $\pi^{-1} \in G$ , поэтому  $bR_G a$ .



## Эквивалентность по группе перестановок

3) Транзитивность. Пусть для элементов  $a, b, c \in N$  верно  $aR_G b$  и  $bR_G c$ , т. е. найдутся такие перестановки  $\pi_1 \in G$  и  $\pi_2 \in G$ , что  $\pi_1(a) = b$  и  $\pi_2(b) = c$ . Тогда

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(a) = \pi_2(\pi_1(a)) = \pi_2(b) = c.$$

Т. к.  $G$  — группа,  $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi \in G$ , поэтому  $aR_G c$ . □

# Эквивалентность по группе перестановок

Пусть  $G$  — подгруппа симметрической группы перестановок  $S_n$ .

Отношение эквивалентности  $R_G$  обозначается как  $\sim_G$ .

Если для элементов  $a, b \in N$  верно  $a \sim_G b$ , то говорят, что элементы  $a$  и  $b$  эквивалентны по группе  $G$  (или относительно группы  $G$ ).

# Орбита элемента

Пусть  $G = \{\pi_1 = e, \pi_2, \dots, \pi_m\}$  — подгруппа симметрической группы перестановок  $S_n$ .

Для элемента  $a \in N$  его **орбитой** (в группе  $G$ ) называется порожденный им класс эквивалентности по отношению  $\sim_G$ .

Обозначение:

$$O_a = \{b \in N \mid \exists \pi \in G : \pi(a) = b\},$$

или

$$O_a = \{\pi_1(a) = a, \pi_2(a), \dots, \pi_m(a)\}.$$

## Пример: вращение треугольника в плоскости

**Пример.** Пусть  $N = \{1, 2, 3\}$ , и  $H = \{\pi_1 = e = (1)(2)(3), \pi_2 = (123), \pi_3 = (132)\}$  — группа вращений правильного треугольника в плоскости. Группа  $G$  является подгруппой симметрической группы перестановок  $S_3$ .

Найдем орбиту элемента  $1 \in N$  в группе  $H$ :

$$O_1 = \{\pi_1(1), \pi_2(1), \pi_3(1)\} = \{1, 2, 3\}.$$

Другими словами, перестановками группы  $H$  элемент 1 может быть переведен в любой другой элемент множества  $N$ .

Т. е. вращениями правильного треугольника в плоскости вершина 1 может перейти в любую другую его вершину.

# Стабилизатор элемента

Пусть  $G = \{\pi_1 = e, \pi_2, \dots, \pi_m\}$  — подгруппа симметрической группы перестановок  $S_n$ .

Для элемента  $a \in N$  его **стабилизатором** (в группе  $G$ ) называется подмножество перестановок группы  $G$ , оставляющих его на месте.

Обозначение:

$$G_a = \{\pi \in G \mid \pi(a) = a\}.$$

## Пример: симметрическая группа перестановок $S_3$

**Пример.** Пусть  $N = \{1, 2, 3\}$ . Рассмотрим симметрическую группу перестановок  $S_3$ ,

$$S_3 = \{\pi_1 = e = (1)(2)(3), \pi_2 = (123), \pi_3 = (132), \\ \pi_4 = (1)(23), \pi_5 = (13)(2), \pi_6 = (12)(3)\}.$$

Найдем стабилизатор элемента  $1 \in N$  в группе  $S_3$ :

$$G_1 = \{\pi_1 = (1)(2)(3), \pi_4(1) = (1)(23)\}.$$

Несложно увидеть, что  $G_1$  — подгруппа группы  $S_3$ .

Оказывается, что стабилизатор элемента в группе перестановок всегда является подгруппой этой группы перестановок.

# Стабилизатор элемента

**Утверждение 8.** *Для каждого элемента  $a \in N$  его стабилизатор  $G_a$  является подгруппой группы  $G$ .*

**Доказательство** проведем по критерию подгруппы.

Пусть  $\pi, \rho \in G_a$ . Рассмотрим перестановку  $\pi \circ \rho^{-1}$ . Тогда

$$(\pi \circ \rho^{-1})(a) = \rho^{-1}(\pi(a)) = \rho^{-1}(a) = a.$$

Т.е.  $\pi \circ \rho^{-1} \in G_a$ .

□

# Индекс стабилизатора в группе перестановок

**Теорема 1.** Для каждого элемента  $a \in N$  индекс его стабилизатора  $G_a$  в группе перестановок  $G$  равен мощности его орбиты  $O_a$ , т. е.  $(G : G_a) = |O_a|$ .

**Доказательство.** Рассмотрим левостороннее разложение группы  $G$  по подгруппе  $G_a$ , определяющей отношение эквивалентности  $\sim_{G_a}$ . Выберем произвольные перестановки  $\rho, \tau \in G$ .



# Индекс стабилизатора в группе перестановок

**Доказательство.** Итак, пусть  $\rho, \tau \in G$ .

1) Если они из одного смежного класса, т. е.  $\rho \sim_{G_a} \tau$ , то найдется такая перестановка  $\pi \in G_a$ , что  $\rho \circ \pi = \tau$ . Тогда

$$\tau(a) = (\rho \circ \pi)(a) = \rho(\pi(a)) = \rho(a).$$

# Индекс стабилизатора в группе перестановок

**Доказательство.** Итак, пусть  $\rho, \tau \in G$ .

2) Пусть они из разных смежных классов. Предположим, что  $\rho(a) = \tau(a)$ . Тогда перестановка  $\tau \circ \rho^{-1} \in G_a$ , и по второму определению отношения эквивалентности по подгруппе  $\rho \sim_{G_a} \tau$ , т. е. они лежат в одном смежном классе — противоречие. Поэтому  $\rho(a) \neq \tau(a)$ .

# Индекс стабилизатора в группе перестановок

**Доказательство.**

Следовательно,

$$\rho(a) = \tau(a) \Leftrightarrow \rho \sim_{G_a} \tau \Leftrightarrow \rho, \tau \text{ из одного смежного класса.}$$

$$\text{Т. е. } (G : G_a) = |O_a|.$$

□

## Пример: индекс подгруппы $G_1$ в группе $S_3$

**Пример.** Мы нашли стабилизатор элемента  $1 \in N$  в группе  $S_3$ :

$$G_1 = \{\pi_1 = (1)(2)(3), \pi_4(1) = (1)(23)\}.$$

Найдем разложение симметрической группы перестановок  $S_3$  на смежные классы по подгруппе  $G_1$ :

Класс	$\pi$	$\pi(1)$
$(1)(2)(3)G_1$	$(1)(2)(3), (1)(23)$	1
$(123)G_1$	$(123), (12)(3)$	2
$(132)G_1$	$(132), (13)(2)$	3

Несложно увидеть, что  $(S_3 : G_1) = |O_1|$ .

# Лемма Бернсайда

**Теорема 2 (лемма У. Бернсайда).** Число  $N(G)$  орбит элементов из множества  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  по подгруппе  $G$  группы перестановок  $S_n$  равно

$$N(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\pi),$$

где  $\lambda_1(\pi)$  — число неподвижных элементов перестановки  $\pi$ .

# Лемма Бернсайда

**Доказательство.** Пусть  $G = \{\pi_1 = e, \pi_2, \dots, \pi_m\}$  — подгруппа группы  $S_n$ . Построим таблицу  $T = (t_{ij})$ , в которой

$$t_{ij} = 1, \quad \text{если } \pi_j(i) = i;$$

$$t_{ij} = 0, \quad \text{иначе.}$$

$N \setminus G$	$\pi_1 = e$	$\pi_2$	...	$\pi_m$	
1	1		...		$ G_1 $
2	1		...		$ G_2 $
...			...		...
$n$	1		...		$ G_n $
	$\lambda_1(\pi_1)$	$\lambda_1(\pi_2)$	...	$\lambda_1(\pi_m)$	

В таблице  $T$  число единиц в каждой строке равно порядку стабилизатора элемента — номера этой строки; число единиц в каждом столбце равно числу неподвижных элементов перестановки с номером этого столбца.

# Лемма Бернсайда

## Доказательство.

Число единиц в таблице  $T$  можно подсчитать

по строкам как  $\sum_{i=1}^n |G_i|$

и по столбцам как  $\sum_{j=1}^m \lambda_1(\pi_j)$ .

Тогда

$$\sum_{i=1}^n |G_i| = \sum_{j=1}^m \lambda_1(\pi_j).$$

# Лемма Бернсайда

**Доказательство.**

По предыдущей теореме  $|G_i| = \frac{|G|}{|O_i|}$ . Поэтому

$$\sum_{i=1}^n |G_i| = |G| \sum_{i=1}^n \frac{1}{|O_i|}.$$

Если для элементов  $i, k \in N$  верно  $i \sim_G k$ , то  $O_i = O_k$ , откуда  $|O_i| = |O_k|$ . Пусть

$$O_{a_1}, \dots, O_{a_{N(G)}}$$

все **различные** орбиты по группе  $G$ .

Тогда

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{|O_i|} = \sum_{l=1}^{N(G)} \frac{1}{|O_{a_l}|} \sum_{i:i \sim_G a_l} 1 = \sum_{l=1}^{N(G)} \frac{1}{|O_{a_l}|} \cdot |O_{a_l}| = N(G).$$



# Лемма Бернсайда

**Доказательство.**

Получаем:

$$|G| \cdot N(G) = \sum_{j=1}^m \lambda_1(\pi_j).$$

Значит,

$$N(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\pi).$$

□

# Лемма Бернсайда

**Пример.** Найдем число орбит элементов множества  $N = \{1, 2, 3\}$  по группе  $H$  вращений правильного треугольника в плоскости. Сколько их?

Напомним, что

$$H = \{\pi_1 = e = (1)(2)(3), \pi_2 = (123), \pi_3 = (132)\}.$$

Тогда

$$\lambda_1(\pi_1) = 3, \lambda_1(\pi_2) = \lambda_1(\pi_3) = 0.$$

Значит,

$$N(H) = \frac{1}{|H|} \sum_{j=1}^3 \lambda_1(\pi_j) = \frac{1}{3}(3 + 0 + 0) = 1.$$

Значит, все элементы множества  $N$  из одной орбиты, т. е. перестановками группы  $H$  каждый элемент множества  $N$  можно перевести в любой другой элемент этого множества.

# Гомоморфизм групп

Если  $G_1 = (S_1; *)$  и  $G_2 = (S_2; \times)$  — группы, то отображение

$$\varphi : S_1 \rightarrow S_2,$$

называется **гомоморфизмом** групп  $G_1$  и  $G_2$ , если оно сохраняет операцию, т.е. для любых элементов  $a, b \in S$  верно

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \times \varphi(b).$$

В отличие от изоморфизма групп при гомоморфизме не требуется взаимная однозначность отображения.

## Ядро и образ гомоморфизма

Пусть  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  — гомоморфизм групп  $G_1 = (S_1; *)$  и  $G_2 = (S_2; \times)$  с нейтральными элементами  $e_1$  и  $e_2$ . Тогда

1)  $\text{Ker } \varphi = \{a \in S_1 \mid \varphi(a) = e_2\}$  — **ядро** гомоморфизма  $\varphi$ ;

2)  $\text{Im } \varphi = \{b \in S_2 \mid \exists a \in S_1' : \varphi(a) = b\}$  — **образ** гомоморфизма  $\varphi$ .

Ядро гомоморфизма  $(\text{Ker } \varphi; *)$  является **нормальной** подгруппой группы  $G_1$ ; образ гомоморфизма  $(\text{Im } \varphi; \times)$  — подгруппой группы  $G_2$ .

**Теорема о гомоморфизме групп:** фактор-группа  $G_1/\text{Ker } \varphi$  изоморфна подгруппе  $\text{Im } \varphi$ .

# Симметрическая группа множества

Пусть  $N$  — конечное множество.

Симметрическую группу перестановок элементов множества  $N$  обозначим как  $S(N)$ .

Отметим, что каждый элемент из  $S(N)$  является **взаимно однозначным** отображением из  $N$  на  $N$ , т.е. **перестановкой** элементов множества  $N$ .

# Действие группы на множестве

Пусть  $G$  — конечная группа,  $N$  — конечное множество.

**Действием** группы  $G$  на множестве  $N$  называется произвольный гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow S(N)$ .

При этом действие элемента группы  $g \in G$  на элемент множества  $a \in N$  определяется как

$$g(a) = (\varphi(g))(a).$$

Т.е.  $g \in G$  определяет перестановку  $\varphi(g) = \pi_g \in S(N)$ , и для  $a \in N$  верно  $g(a) = \pi_g(a) \in N$ .

## Действие группы на множестве

Пусть гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow S(N)$  определяет действие конечной группы  $G$  на конечном множестве  $N$ .

Тогда по теореме о гомоморфизме групп подгруппа  $H = \text{Im } \varphi$  группы перестановок  $S(N)$ , изоморфная группе  $G/\text{Ker } \varphi$ , осуществляет **то же действие** на элементы множества  $N$ .

Поэтому можно доказать аналогичные утверждения при действии произвольной группы (а не только группы перестановок) на множестве.

## Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все неизоморфные группы из 4-х элементов.
2. Найти все неизоморфные группы из  $p$  элементов, где  $p$  — простое число.
3. Найти группу перестановок вершин правильного шестиугольника при его вращениях в плоскости. Найти все подгруппы этой группы. Найти орбиту вершины 1 в группе и в каждой из подгрупп. По лемме Бернсайда подсчитать число орбит вершин по каждой из подгрупп.
4. По лемме Бернсайда подсчитать число орбит вершин правильного восьмиугольника при его вращениях в плоскости на угол, кратный  $\frac{\pi}{2}$ .
5. Пусть  $H$  — подгруппа группы  $G$ , и порядок  $H$  равен  $\frac{|G|}{2}$ . Доказать, что  $H$  — нормальная подгруппа группы  $G$ .



## Литература к лекции

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988. Т. 1. С. 12–23.
2. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 53–55.

Конец лекции