Лекция 7. Подгруппы. Смежные классы, индекс подгруппы в группе. Теорема Лагранжа о порядке подгруппы конечной группы. Нормальные подгруппы. Фактор-группы. Действие группы на множестве. Орбита и стабилизатор элемента. Лемма Бернсайда.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.su

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Смежные классы

Пусть $G = (S; *)$ — группа, а $H = (T; *)$, $T \subseteq S$, — ее подгруппа.
Определим на множестве S бинарное отношение R_H: если $a, b \in S$, то

$$aR_Hb \iff \exists h \in H : a * h = b.$$

Заметим, что отношение R_h можно задавать так: если $a, b \in S$, то

$$aR_Hb \iff a' * b \in H,$$

где элемент a' симметричен элементу a в группе G.

Отношение эквивалентности по подгруппе

Утверждение 1. *Отношение R_H является отношением эквивалентности на множестве S.*

Доказательство. Свойства отношения эквивалентности.

1) Рефлексивность. Для каждого $a \in S$ выберем $e \in H$ — нейтральный элемент. Тогда $a * e = a$, поэтому aR_Ha.

2) Симметричность. Пусть для элементов $a, b \in S$ верно aR_Hb, т. е. найдется такой элемент $h \in H$, что $a * h = b$. Тогда

$$a * h = b, \;\; a * h * h' = b * h', a = b * h'.$$

Т. к. H — группа, $h' \in H$. Поэтому bR_Ha.

3) Транзитивность. Пусть для элементов $a, b, c \in S$ верно aR_Hb и bR_Hc, т. е. найдутся такие элементы $h_1 \in H$ и $h_2 \in H$, что $a * h_1 = b$ и $b * h_2 = c$. Тогда

$$a * (h_1 * h_2) = (a * h_1) * h_2 = b * h_2 = c.$$

Т. к. H — группа, $h_1 * h_2 = h \in H$. Поэтому aR_Hc. □

Смежные классы

Класс эквивалентности множества S по отношению эквивалентности R_H называется **левым смежным классом** группы G по подгруппе H.
Обозначение: левый смежный класс, порожденный элементом $a \in S$:

$$aH = \{b \in S \mid \exists h \in H : a * h = b\}.$$

В аддитивной символике обозначение:

$$a + H = \{b \in S \mid \exists h \in H : a + h = b\}.$$

Напомним, что классы эквивалентности или не пересекаются, или совпадают. Поэтому отношение R_H **разбивает** множество S на левые смежные классы. Такое разбиение называется **левосторонним разложением группы G по подгруппе H**.

Аналогично вводится **правостороннее разложение группы G по подгруппе H**.

Смежные классы

Пусть $H = \{h_1 = e, h_2, \ldots, h_m\}$ — конечная подгруппа группы $G = (S; *)$.
Тогда для каждого элемента $a \in S$ левый смежный класс

$$aH = \{a * h_1, a * h_2, \ldots, a * h_m\}$$

также содержит конечное число элементов.

Пример. Найдем левостороннее разложение симметрической группы перестановок S_3 по подгруппе H вращений правильного треугольника в плоскости.
Напомним, подгруппа

$$H = \{e = (1)(2)(3), (123), (132)\}.$$

Тогда

$$eH = H = \{e = (1)(2)(3), (123), (132)\};$$

$$(1)(23)H = \{(1)(23), (12)(3), (13)(2)\}.$$

Смежные классы

Утверждение 2. *В каждом левом (правом) смежном классе группы по конечной подгруппе число элементов совпадает с порядком этой подгруппы.*

Доказательство. Пусть $H = \{h_1 = e, h_2, \ldots, h_m\}$ — конечная подгруппа группы $G = (S; *)$.

Тогда для элемента $a \in S$ левый смежный класс aH состоит из элементов вида

$$a * h_1, a * h_2, \ldots, a * h_m.$$

Поэтому $|aH| \leqslant |H|$.

Предположим, что $|aH| < |H|$. т. е. найдутся такие элементы $h_i, h_j \in H$, $h_i \neq h_j$, что

$$a * h_i = a * h_j.$$

Тогда по правилу сокращения $h_i = h_j$ — противоречие.

Следовательно, $|aH| = |H|$. $\square$

Теорема Лагранжа

Следствие 2.1 (теорема Лагранжа). *Порядок каждой подгруппы конечной группы делит порядок группы.*

Доказательство. Пусть $G = (S; *)$ — конечная группа, а H — ее подгруппа. Рассмотрим левостороннее разложение группы G по подгруппе H. Тогда все левые смежные классы равномощны, и их мощность равна порядку подгруппы H. Каждый элемент множества S лежит ровно в одном левом смежном классе, поэтому

$$|G| = |H| \cdot \{\text{число левых смежных классов}\}.$$

Поэтому $|H| \mid |G|$. $\square$

Порядок элемента конечной группы

Следствие 2.2. *Порядок каждого элемента конечной группы делит порядок группы.*

Доказательство. Пусть $G = (S; *)$ — конечная группа, и $a \in S$ — какой-то ее элемент. Достаточно рассмотреть циклическую ее подгруппу $H = \langle a \rangle$ с образующим элементом $a \in S$. Тогда порядок элемента a равен порядку группы H, а значит, делит порядок группы G. $\square$

Индекс подгруппы в группе

Число смежных классов конечной группы G по подгруппе называется **индексом подгруппы H в группе G** и обозначается как $(G : H)$.

Следствие 2.3. *Порядок конечной группы равен произведению порядка какой-то ее подгруппы на индекс этой подгруппы в группе, т. е.*

$$|G| = |H| \cdot (G : H),$$

где G — конечная группа, а H — ее подгруппа.

Пример: все неизоморфные группы из 5 элементов

Пример. Найдем все возможные группы из 5 элементов (с точностью до изоморфизма).

Решение. Пусть $|S| = 5$, и $G = (S; *)$ — группа.

Если $a \in S$, то порядок элемента a делит порядок группы, т. е. делит 5.
Т. е. каждый элемент этой группы имеет порядок или 1, или 5.
Но порядок 1 может иметь только нейтральные элемент e.
Значит, все другие элементы имеют порядок 5. Т. е. эта группа циклическая, и

$$S = \{a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 = e\}.$$

Следовательно, с точностью до изоморфизма существует только одна группа из 5 элементов, и она является циклической.

Несложно заметить, что это группа вращений правильного пятиугольника в плоскости.

Нормальные подгруппы

Пусть $G = (S; *)$ — группа, а $H = (T; *)$, $T \subseteq S$, — ее подгруппа.

Подгруппа H называется **нормальной подгруппой** (или **нормальным делителем**) группы G, если для каждого элемента $a \in S$ его левые и правые смежные классы совпадают, т. е. если

$$\forall a \in S\ aH = Ha.$$

Заметим, что каждая подгруппа коммутативной группы нормальна.

Если подгруппа H нормальна в группе G, то левостороннее и правостороннее разложения группы G по подгруппе H совпадают.

Критерий нормальности подгруппы

Утверждение 3 (критерий нормальности подгруппы). *Подгруппа $H = (T; *)$ является нормальной подгруппой группы $G = (S, *)$ тогда и только тогда, когда для каждого элемента $a \in S$ для любого элемента $h \in H$ верно*

$$a' * h * a \in H,$$

где элемент a' симметричен к элементу a в группе G.

Критерий нормальности подгруппы

Доказательство.
$\Rightarrow$. Если для каждого элемента $a \in S$ верно $aH = Ha$, то для любого элемента $h \in H$ найдется такой элемент $h_1 \in H$, что

$$a * h_1 = h * a.$$

Получаем:

$$a' * (a * h_1) = a' * (h * a), \;\; h_1 = a' * h * a.$$

Т. е. $a' * h * a \in H$.

Критерий нормальности подгруппы

Доказательство.
$\Leftarrow$. Если для каждого элемента $a \in S$ для любого элемента $h \in H$ верно $a' * h * a \in H$, то

$$a' * h * a = h_1 \in H.$$

Получаем:

$$a * (a' * h * a) = a * h_1, \ \ h * a = a * h_1.$$

т. е. $Ha \subseteq aH$.
Включение $aH \subseteq Ha$ доказывается аналогично, рассматривая произведение $(a')' * h * a'$, $a' \in S$.
Поэтому $aH = Ha$.

$\square$

Нормальные подгруппы в S_n

Пример. Докажем, что группа H вращений правильного треугольника в плоскости является нормальной подгруппой группы S_3.
Напомним, что группа

$$S_3 = \{e = (1)(2)(3), (1)(23), (12)(3), (13)(2), (123), (132)\},$$

и подгруппа

$$H = \{(1)(2)(3), (123), (132)\}.$$

Тогда

$$eH = H = \{(1)(2)(3), (123), (132)\} = He$$

и

$$(1)(23)H = \{(1)(23), (12)(3), (13)(2)\} = H(1)(23).$$

Т. е. подгруппа H — нормальная подгруппа группы S_3.

Фактор-группа

Пусть $G = (S; *)$ — группа, и $N = (T; *)$ — ее **нормальная** подгруппа.

Рассмотрим разложение группы G по нормальной подгруппе N.

Введем операцию умножения смежных классов: если элементы $a, b \in S$, то

$$(aN)(bN) = (ab)N.$$

Фактор-группа

Утверждение 4. *Если N — нормальная подгруппа группы $G = (S; *)$, то ввведенная выше операция умножения смежных классов корректна*.

Доказательство. Пусть $a, b \in S$ и $a_1 \in aN$ и $b_1 \in bN$. Докажем, что

$$(a_1 N)(b_1 N) = (aN)(bN) = (ab)N,$$

т. е. что результат операции не зависит от выбора элементов, по которым строятся смежные классы.

Фактор-группа

Доказательство. Пусть $h \in N$. Покажем, что найдется элемент $x \in N$, являющийся решением уравнения

$$a * b * h = a_1 * b_1 * x.$$

Т. к. $a_1 \in aN$, $b_1 \in bN$, найдутся такие элементы $h_1, h_2 \in N$, что $a_1 = a * h_1$, $b_1 = b * h_2$. Тогда

$$a * b * h = a_1 * b_1 * x = a * h_1 * b * h_2 * x, \;\; b * h = h_1 * b * h_2 * x.$$

Т. к. N — нормальная подгруппа, найдется такой элемент $h_3 \in N$, что $h_1 * b = b * h_3$. Поэтому

$$b * h = h_1 * b * h_2 * x = b * h_3 * h_2 * x, \;\; h = h_3 * h_2 * x.$$

Значит, $x = h_2' * h_3' * h \in N$, где элементы $h_2', h_3' \in N$ симметричны соответственно к элементам $h_2, h_3 \in N$. $\square$

Фактор-группа

Утверждение 5. *Если N — нормальная подгруппа группы $G = (S; *)$, то множество смежных классов группы G по подгруппе N с операцией их умножения образует группу.*

Доказательство. Свойства группы.
1) Ассоциативность операции умножения: следует из ассоциативности операции $*$ в группе G.
2) Существование нейтрального элемента: $eN = N$, где $e \in S$ — нейтральный элемент группы G.
3) Для каждого элемента aN, где $a \in S$, существование симметричного элемента: $a'N$, где элемент $a' \in S$ симметричен к элементу a в группе G.

$\square$

Группа смежных классов группы G по нормальной ее подгруппе N с операцией их умножения называется **фактор-группой** группы G по подгруппе N и обозначается G/N.

Фактор-группа

Утверждение 6. *Порядок фактор-группы G/N конечной группы G по ее нормальной подгруппе N равен индексу подгруппы N в группе G, т. е.*

$$|G/N| = (G : N) = \frac{|G|}{|N|}.$$

Фактор-группа

Пример. Найдем фактор-группу S_3/H группы S_3 по нормальной подгруппе H вращений правильного треугольника в плоскости.
Тогда фактор-группа

$$S_3/H = (\{eH, (1)(23)H\}, \cdot),$$

где

$$eH = H = \{(1)(2)(3), (123), (132)\},$$

и

$$(1)(23)H = \{(1)(23), (12)(3), (13)(2)\}.$$

В фактор-группе S_3/H верно

$$eH \cdot X = X \cdot eH = X, \text{ при } X = eH, (1)(23)H;$$
$$(1)(23)H \cdot (1)(23)H = eH.$$

т. е. фактор-группа S_3/H изоморфна группе S_2.

Действие группы перестановок

Пусть G — подгруппа симметрической группы перестановок S_n. Напомним, что $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Будем говорить, что группа перестановок G **действует** на множестве N.

При этом при действии элемента $\pi \in G$ элемент $a \in N$ переходит в элемент $\pi(a) \in N$.

Эквивалентность по группе перестановок

Пусть G — подгруппа симметрической группы перестановок S_n, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Определим бинарное отношение R_G на множестве N: если $a, b \in N$, то

$$aR_G b \Leftrightarrow \exists \pi \in G : \pi(a) = b.$$

Эквивалентность по группе перестановок

Утверждение 7. *Отношение R_G является отношением эквивалентности на множестве N.*

Доказательство. Свойства отношения эквивалентности.
1) Рефлексивность. Для каждого элемента $a \in N$ выберем $\pi_1 = e \in G$ — тождественную перестановку. Тогда $\pi_1(a) = a$, поэтому $aR_G a$.
2) Симметричность. Пусть для элементов $a, b \in N$ верно $aR_G b$, т. е. найдется такая перестановка $\pi \in G$, что $\pi(a) = b$. Тогда

$$\pi(a) = b,\ \pi^{-1}(\pi(a)) = \pi^{-1}(b), a = \pi^{-1}(b).$$

Т. к. G — группа, $\pi^{-1} \in G$, поэтому $bR_G a$.

Эквивалентность по группе перестановок

3) Транзитивность. Пусть для элементов $a, b, c \in N$ верно $aR_G b$ и $bR_G c$, т. е. найдутся такие перестановки $\pi_1 \in G$ и $\pi_2 \in G$, что $\pi_1(a) = b$ и $\pi_2(b) = c$. Тогда

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(a) = \pi_2(\pi_1(a)) = \pi_2(b) = c.$$

Т. к. G — группа, $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi \in G$, поэтому $aR_G c$. $\square$

Эквивалентность по группе перестановок

Пусть G — подгруппа симметрической группы перестановок S_n.

Отношение эквивалентности R_G обозначается как $\sim_G$.

Если для элементов $a, b \in N$ верно $a \sim_G b$, то говорят, что элементы a и b **эквивалентны по группе** G (или **относительно группы** G).

Орбита элемента

Пусть $G = \{\pi_1 = e, \pi_2, \dots, \pi_m\}$ — подгруппа симметрической группы перестановок S_n.

Для элемента $a \in N$ его **орбитой** (в группе G) называется порожденный им класс эквивалентности по отношению $\sim_G$.

Обозначение:

$$O_a = \{b \in N \mid \exists \pi \in G : \pi(a) = b\},$$

или

$$O_a = \{\pi_1(a) = a, \pi_2(a), \dots, \pi_m(a)\}.$$

Пример: вращение правильного треугольника в плоскости

Пример. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, и $H = \{\pi_1 = e = (1)(2)(3), \pi_2 = (123), \pi_3 = (132)\}$ — группа вращений правильного треугольника в плоскости. Группа G является подгруппой симметрической группы перестановок S_3.

Найдем орбиту элемента $1 \in N$ в группе H:

$$O_1 = \{\pi_1(1), \pi_2(1), \pi_3(1)\} = \{1, 2, 3\}.$$

Другими словами, перестановками группы H элемент 1 может быть переведен в любой другой элемент множества N.

Т. е. вращениями правильного треугольника в плоскости вершина 1 может перейти в любую другую его вершину.

Стабилизатор элемента

Пусть $G = \{\pi_1 = e, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$ — подгруппа симметрической группы перестановок S_n.

Для элемента $a \in N$ его **стабилизатором** (в группе G) называется подмножество перестановок группы G, оставляющих его на месте.

Обозначение:

$$G_a = \{\pi \in G \mid \pi(a) = a\}.$$

Пример: симметрическая группа перестановок S_3

Пример. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим симметрическую группу перестановок S_3,

$$\begin{aligned} S_3 \quad = \quad & \{\pi_1 = e = (1)(2)(3), \pi_2 = (123), \pi_3 = (132), \\ & \pi_4 = (1)(23), \pi_5 = (13)(2), \pi_6 = (12)(3)\}. \end{aligned}$$

Найдем стабилизатор элемента $1 \in N$ в группе S_3:

$$G_1 = \{\pi_1 = (1)(2)(3), \pi_4(1) = (1)(23)\}.$$

Несложно увидеть, что G_1 — подгруппа группы S_3.

Оказывается, что стабилизатор элемента в группе перестановок всегда является подгруппой этой группы перестановок.

Стабилизатор элемента

Утверждение 8. *Для каждого элемента $a \in N$ его стабилизатор G_a является подгруппой группы G.*

Доказательство проведем по критерию подгруппы.
Пусть $\pi, \rho \in G_a$. Рассмотрим перестановку $\pi \circ \rho^{-1}$. Тогда

$$(\pi \circ \rho^{-1})(a) = \rho^{-1}(\pi(a)) = \rho^{-1}(a) = a.$$

Т. е. $\pi \circ \rho^{-1} \in G_a$. □

Индекс стабилизатора в группе перестановок

Теорема 1. *Для каждого элемента* $a \in N$ *индекс его стабилизатора* G_a *в группе перестановок* G *равен мощности его орбиты* O_a*, т. е.* $(G : G_a) = |O_a|$.

Доказательство. Рассмотрим левостороннее разложение группы G по подгруппе G_a, определяющей отношение эквивалентности $\sim_{G_a}$. Выберем произвольные перестановки $\rho, \tau \in G$.

Индекс стабилизатора в группе перестановок

Доказательство. Итак, пусть $\rho, \tau \in G$.

1) Если они из одного смежного класса, т. е. $\rho \sim_{G_a} \tau$, то найдется такая перестановка $\pi \in G_a$, что $\rho \circ \pi = \tau$. Тогда

$$\tau(a) = (\rho \circ \pi)(a) = \rho(\pi(a)) = \rho(a).$$

Индекс стабилизатора в группе перестановок

Доказательство. Итак, пусть $\rho, \tau \in G$.

2) Пусть они из разных смежных классов. Предположим, что $\rho(a) = \tau(a)$. Тогда перестановка $\tau \circ \rho^{-1} \in G_a$, и по второму определению отношения эквивалентности по подгруппе $\rho \sim_{G_a} \tau$, т. е. они лежат в одном смежном классе — противоречие. Поэтому $\rho(a) \neq \tau(a)$.

Индекс стабилизатора в группе перестановок

Доказательство.
Следовательно,

$$\rho(a) = \tau(a) \;\Leftrightarrow\; \rho \sim_{G_a} \tau \;\Leftrightarrow\; \rho, \tau \text{ из одного смежного класса.}$$

Т. е. $(G : G_a) = |O_a|$.

$\square$

Пример: индекс подгруппы G_1 в группе S_3

Пример. Мы нашли стабилизатор элемента $1 \in N$ в группе S_3:

$$G_1 = \{\pi_1 = (1)(2)(3), \pi_4(1) = (1)(23)\}.$$

Найдем разложение симметрической группы перестановок S_3 на смежные классы по подгруппе G_1:

Класс	π	$\pi(1)$
$(1)(2)(3)G_1$	$(1)(2)(3), (1)(23)$	1
$(123)G_1$	$(123), (12)(3)$	2
$(132)G_1$	$(132), (13)(2)$	3

Несложно увидеть, что $(S_3 : G_1) = |O_1|$.

Лемма Бернсайда

Теорема 2 (лемма У. Бернсайда). *Число $N(G)$ орбит элементов из множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ по подгруппе G группы перестановок S_n равно*

$$N(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\pi),$$

где $\lambda_1(\pi)$ — число неподвижных элементов перестановки π.

Лемма Бернсайда

Доказательство. Пусть $G = \{\pi_1 = e, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$ — подгруппа группы S_n. Построим таблицу $T = (t_{ij})$, в которой

$t_{ij} = 1$, если $\pi_j(i) = i$;

$t_{ij} = 0$, иначе.

T :

$N \setminus G$	$\pi_1 = e$	π_2	$\ldots$	π_m	
1	1		$\ldots$		$\lvert G_1 \rvert$
2	1		$\ldots$		$\lvert G_2 \rvert$
$\ldots$			$\ldots$		$\ldots$
n	1		$\ldots$		$\lvert G_n \rvert$
	$\lambda_1(\pi_1)$	$\lambda_1(\pi_2)$	$\ldots$	$\lambda_1(\pi_m)$	

В таблице T число единиц в каждой строке равно порядку стабилизатора элемента — номера этой строки; число единиц в каждом столбце равно числу неподвижных элементов перестановки с номером этого столбца.

Лемма Бернсайда

Доказательство.
Число единиц в таблице T можно подсчитать
по строкам как $\sum\limits_{i=1}^{n} |G_i|$
и по столбцам как $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_1(\pi_j)$.
Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |G_i| = \sum_{j=1}^{m} \lambda_1(\pi_j).$$

Лемма Бернсайда

Доказательство.
По предыдущей теореме $|G_i| = \frac{|G|}{|O_i|}$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} |G_i| = |G| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|O_i|}.$$

Если для элементов $i, k \in N$ верно $i \sim_G k$, то $O_i = O_k$, откуда $|O_i| = |O_k|$. Пусть

$$O_{a_1}, \ldots, O_{a_{N(G)}}$$

все **различные** орбиты по группе G.
Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|O_i|} = \sum_{l=1}^{N(G)} \frac{1}{|O_{a_l}|} \sum_{i:i \sim_G a_l} 1 = \sum_{l=1}^{N(G)} \frac{1}{|O_{a_l}|} \cdot |O_{a_l}| = N(G).$$

Лемма Бернсайда

Доказательство.
Следовательно,

$$|G| \cdot N(G) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_1(\pi_j).$$

Значит,

$$N(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\pi).$$

$\square$

Лемма Бернсайда

Пример. Найдем число орбит элементов множества $N = \{1, 2, 3\}$ по группе H вращений правильного треугольника в плоскости. Сколько их?
Напомним, что

$$H = \{\pi_1 = e = (1)(2)(3), \pi_2 = (123), \pi_3 = (132)\}.$$

Тогда

$$\lambda_1(\pi_1) = 3, \lambda_1(\pi_2) = \lambda_1(\pi_3) = 0.$$

Значит,

$$N(H) = \frac{1}{|H|}\sum_{j=1}^{3}\lambda_1(\pi_j) = \frac{1}{3}(3 + 0 + 0) = 1.$$

Значит, все элементы множества N из одной орбиты, т. е. перестановками группы H каждый элемент множества N можно перевести в любой другой элемент этого множества.

Гомоморфизм групп

Если $G_1 = (S_1; *)$ и $G_2 = (S_2; \times)$ — группы, то отображение

$$\varphi : S_1 \to S_2,$$

называется **гомоморфизмом** групп G_1 и G_2, если оно сохраняет операцию, т.е. для любых элементов $a, b \in S$ верно

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \times \varphi(b).$$

В отличие от изоморфизма групп при гомоморфизме не требуется взаимная однозначность отображения.

Ядро и образ гомоморфизма

Пусть $\varphi : S_1 \to S_2$ — гомоморфизм групп $G_1 = (S_1; *)$ и $G_2 = (S_2; \times)$ с нейтральными элементами e_1 и e_2. Тогда

1) $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{a \in S_1 \mid \varphi(a) = e_2\}$ — **ядро** гомоморфизма φ;

2) $\mathrm{Im}\ \varphi = \{b \in S_2 \mid \exists a \in S_1' : \varphi(a) = b\}$ — **образ** гомоморфизма φ.

Ядро гомоморфизма $(\mathrm{Ker}\ \varphi; *)$ является **нормальной** подгруппой группы G_1; образ гомоморфизма $(\mathrm{Im}\ \varphi; \times)$ — подгруппой группы G_2.

Теорема о гомоморфизме групп: фактор-группа $G_1/\mathrm{Ker}\ \varphi$ изоморфна подгруппе $\mathrm{Im}\ \varphi$.

Симметрическая группа множества

Пусть N — конечное множество.
Симметрическую группу перестановок элементов множества N обозначим как $S(N)$.
Отметим, что каждый элемент из $S(N)$ является **взаимно однозначным** отображением из N на N, т.е. **перестановкой** элементов множества N.

Действие группы на множестве

Пусть G — конечная группа, N — конечное множество.

Действием группы G на множестве N называется произвольный гомоморфизм $\varphi : G \to S(N)$.

При этом действие элемента группы $g \in G$ на элемент множества $a \in N$ определяется как

$$g(a) = (\varphi(g))(a).$$

Т. е. $g \in G$ определяет перестановку $\varphi(g) = \pi_g \in S(N)$, и для $a \in N$ верно $g(a) = \pi_g(a) \in N$.

Действие группы на множестве

Пусть гомоморфизм $\varphi : G \to S(N)$ определяет действие конечной группы G на конечном множестве N.

Тогда по теореме о гомоморфизме групп подгруппа $H = \mathrm{Im}\ \varphi$ группы перестановок $S(N)$, изоморфная группе $G/\mathrm{Ker}\ \varphi$, осуществляет **то же действие** на элементы множества N.

Поэтому можно доказать аналогичные утверждения при действии произвольной группы (а не только группы перестановок) на множестве.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все неизоморфные группы из 4-х элементов.

2. Найти все неизоморфные группы из p элементов, где p — простое число.

3. Найти группу перестановок вершин правильного шестиугольника при его вращениях в плоскости. Найти все подгруппы этой группы. Найти орбиту вершины 1 в группе и в каждой из подгрупп. По лемме Бернсайда подсчитать число орбит вершин по каждой из подгрупп.

4. По лемме Бернсайда подсчитать число орбит вершин правильного восьмиугольника при его вращениях в плоскости на угол, кратный $\frac{\pi}{2}$.

5. Пусть H — подгруппа группы G, и порядок H равен $\frac{|G|}{2}$. Доказать, что H — нормальная подгруппа группы G.

Литература к лекции

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988. Т. 1. С. 12–23.

2. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 53–55.

Конец лекции