Лекция 7. Действие группы на множестве. Орбита и стабилизатор элемента, теорема о порядке стабилизатора элемента. Лемма Бернсайда.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Гомоморфизм групп

Если $G_1 = (S_1; *)$ и $G_2 = (S_2; \times)$ — группы, то отображение

$$\varphi : S_1 \to S_2,$$

называется **гомоморфизмом** из группы G_1 в группу G_2, если оно сохраняет операцию, т.е. для любых элементов $a, b \in S$ верно

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \times \varphi(b).$$

В отличие от изоморфизма групп при гомоморфизме не требуется взаимная однозначность отображения.

Свойства гомоморфизма групп

Пусть $\varphi : S_1 \to S_2$ — гомоморфизм из группы $G_1 = (S_1; *)$ в группу $G_2 = (S_2; \times)$. Тогда

1) $\varphi(e_1) = e_2$, где e_1, e_2 — соответственно нейтральные элементы групп G_1, G_2. В самом деле, если $a \in S_1$, то

$$\varphi(a) = \varphi(a * e_1) = \varphi(a) \times \varphi(e_1),$$

откуда $\varphi(e_1) = e_2$.

2) $\varphi(a') = \varphi(a)'$, где $a' \in S_1, \varphi(a)' \in S_2$ — соответственно симметричные элементы к элементам $a \in S_1, \varphi(a) \in S_2$ групп G_1, G_2. В самом деле,

$$e_2 = \varphi(e_1) = \varphi(a * a') = \varphi(a) \times \varphi(a'),$$

откуда $\varphi(a') = \varphi(a)'$.

Симметрическая группа множества

Пусть N — конечное множество.
Симметрическую группу перестановок элементов множества N обозначим как $S(N)$.
Отметим, что каждый элемент из $S(N)$ является **взаимно однозначным** отображением из N на N, т.е. **перестановкой** элементов множества N.

Действие группы на множестве

Пусть G — конечная группа, а N — конечное множество.

Действием группы G на множестве N называется произвольный гомоморфизм $\varphi : G \to S(N)$.
При этом действие элемента группы $g \in G$ на элемент множества $a \in N$ определяется как

$$g(a) = (\varphi(g))(a).$$

Т.е. $g \in G$ определяет перестановку $\varphi(g) = \pi_g \in S(N)$, и для $a \in N$ верно $g(a) = \pi_g(a) \in N$.

Тождественное действие

Пусть G — подгруппа симметрической группы перестановок S_n, а $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество.

Пусть $\varphi : G \to S(N)$ — **тождественное** действие, т.е. $\varphi(g) = g$, где $g \in G$.
Тогда φ определяет действие группы G на множестве N.

Как правило, мы будем рассматривать такое действие группы на множестве.

Цикловой индекс группы при действии на множестве

Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Тогда **цикловым индексом** группы G при действии на множестве N называется многочлен переменных $t_1, \ldots, t_n$

$$Z_G(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} t_1^{\lambda_1(\pi_g)} \cdot \ldots \cdot t_n^{\lambda_n(\pi_g)},$$

где $\lambda(\pi_g) = (\lambda_1(\pi_g), \ldots, \lambda_n(\pi_g))$ — тип перестановки $\pi_g \in S(N)$.

Если G — подгруппа симметрической группы перестановок S_n, тождественно действующая на множестве N, то цикловой индекс при таком действии совпадает с цикловым индексом группы G.

Эквивалентность по группе

Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Определим бинарное отношение R_G на множестве N: если $a, b \in N$, то

$$aR_Gb \Leftrightarrow \exists g \in G : \pi_g(a) = b.$$

Эквивалентность по группе

Теорема 1. *Отношение R_G является отношением эквивалентности на множестве N.*

Доказательство. Свойства отношения эквивалентности.

1) Рефлексивность. Для каждого элемента $a \in N$ выберем $e \in G$ — нейтральный элемент группы G. Тогда $\pi_e(a) = a$, поэтому $aR_G a$.

2) Симметричность. Пусть для элементов $a, b \in N$ верно $aR_G b$, т.е. найдется такой элемент $g \in G$, что $\pi_g(a) = b$. Тогда

$$\pi_g(a) = b,\ \pi_g^{-1}(\pi_g(a)) = \pi_g^{-1}(b) = \pi_{g'}(b),\ a = \pi_{g'}(b),$$

где элемент g' симметричен к элементу g в группе G. Поэтому $bR_G a$.

Эквивалентность по группе

Доказательство.
3) Транзитивность. Пусть для элементов $a, b, c \in N$ верно $aR_G b$ и $bR_G c$, т.е. найдутся такие элементы $g_1 \in G$ и $g_2 \in G$, что $\pi_{g_1}(a) = b$ и $\pi_{g_2}(b) = c$. Тогда

$$\pi_{g_2 * g_1}(a) = (\pi_{g_2} \circ \pi_{g_1})(a) = \pi_{g_2}(\pi_{g_1}(a)) = \pi_{g_2}(b) = c.$$

Т.к. G — группа, $g_2 * g_1 = g \in G$, поэтому $aR_G c$. $\square$

Эквивалентность по группе

Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Отношение эквивалентности R_G обозначается как $\sim_G$.

Если для элементов $a, b \in N$ верно $a \sim_G b$, то говорят, что элементы a и b **эквивалентны по группе** G (или **относительно группы** G).

Орбита элемента

Пусть группа $G = \{g_1 = e, g_2, \ldots, g_m\}$ действует на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для элемента $a \in N$ его **орбитой** (в группе G) называется порожденный им класс эквивалентности по отношению $\sim_G$.

Обозначение:

$$O_a = \{b \in N \mid \exists g \in G : \pi_g(a) = b\},$$

или

$$O_a = \{\pi_{g_1}(a) = a, \pi_{g_2}(a), \ldots, \pi_{g_m}(a)\}.$$

Пример: вращение треугольника в плоскости

Пример. Пусть группа вращений правильного треугольника в плоскости $H = \{\pi_1 = e = (1)(2)(3), \pi_2 = (123), \pi_3 = (132)\}$ тождественно действует на множестве $N = \{1, 2, 3\}$.

Найдем орбиту элемента $1 \in N$ в группе H:

$$O_1 = \{\pi_1(1), \pi_2(1), \pi_3(1)\} = \{1, 2, 3\}.$$

Другими словами, перестановками группы H элемент 1 может быть переведен в любой другой элемент множества N.

Т.е. вращениями правильного треугольника в плоскости вершина 1 может перейти в любую другую его вершину.

Стабилизатор элемента

Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для элемента $a \in N$ его **стабилизатором** (в группе G) называется подмножество элементов группы G, оставляющих его на месте.

Обозначение:

$$G_a = \{g \in G \mid \pi_g(a) = a\}.$$

Пример: симметрическая группа перестановок S_3

Пример. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим тождественное действие симметрической группы перестановок

$$
\begin{aligned}
S_3 \quad = \quad & \{\pi_1 = e = (1)(2)(3), \pi_2 = (123), \pi_3 = (132), \\
& \pi_4 = (1)(23), \pi_5 = (13)(2), \pi_6 = (12)(3)\},
\end{aligned}
$$

на множестве N.

Найдем стабилизатор элемента $1 \in N$ в группе S_3:

$$G_1 = \{\pi_1 = (1)(2)(3), \pi_4(1) = (1)(23)\}.$$

Несложно увидеть, что G_1 — подгруппа группы S_3.

Оказывается, что стабилизатор элемента в группе всегда является подгруппой этой группы перестановок.

Стабилизатор элемента

Теорема 2. *Пусть конечная группа G действует на конечном множестве N. Тогда для каждого элемента $a \in N$ его стабилизатор G_a является подгруппой группы G.*

Доказательство проведем по критерию подгруппы.
Пусть $g_1, g_2 \in G_a$. Рассмотрим элемент $g_1 * g_2'$. Тогда

$$\pi_{g_1 * g_2'}(a) = (\pi_{g_1} \circ \pi_{g_2'})(a) = \pi_{g_1}(\pi_{g_2'}(a)) = \pi_{g_1}(\pi_{g_2}^{-1}(a)) = \pi_{g_1}(a) = a.$$

Т.е. $g_1 * g_2' \in G_a$. $\square$

Индекс стабилизатора в группе

Теорема 3. *Пусть конечная группа G действует на конечном множестве N. Тогда для каждого элемента $a \in N$ индекс его стабилизатора G_a в группе G равен мощности его орбиты O_a, т.е. $(G : G_a) = |O_a|$.*

Индекс стабилизатора в группе

Доказательство. Рассмотрим левостороннее разложение группы G по подгруппе G_a, определяющей отношение эквивалентности $\sim_{G_a}$.

Индекс стабилизатора в группе

Пусть $g_1, g_2 \in G$.

1) Если они из одного смежного класса, т.е. $g_1 \sim_{G_a} g_2$, то найдется такой элемент $h \in G_a$, что $g_2 = g_1 * h$. Тогда

$$\pi_{g_2}(a) = \pi_{g_1 * h}(a) = (\pi_{g_1} \circ \pi_h)(a) = \pi_{g_1}(\pi_h(a)) = \pi_{g_1}(a).$$

Индекс стабилизатора в группе

Пусть $g_1, g_2 \in G$.

2) Пусть они из разных смежных классов. Предположим, что $\pi_{g_2}(a) = \pi_{g_1}(a)$. Тогда

$$\pi_{g_1' * g_2}(a) = (\pi_{g_1'} \circ \pi_{g_2})(a) = (\pi_{g_1}^{-1} \circ \pi_{g_2})(a) = a,$$

где элемент g_1' симметричен к элементу g_1 в группе G. Значит, $g_1' * g_2 \in G_a$, и по второму определению отношения эквивалентности по подгруппе $g_1 \sim_{G_a} g_2$, или они лежат в одном смежном классе — противоречие. Т.е. $\pi_{g_1}(a) \neq \pi_{g_2}(a)$.

Индекс стабилизатора в группе

Доказательство. Следовательно,

$\pi_{g_1}(a) = \pi_{g_2}(a) \Leftrightarrow g_1 \sim_{G_a} g_2 \Leftrightarrow g_1, g_2$ из одного смежного класса.

Т.е. $(G : G_a) = |O_a|$.

$\square$

Пример: индекс подгруппы G_1 в группе S_3

Пример. Мы нашли стабилизатор элемента $1 \in N$ в группе S_3:

$$G_1 = \{\pi_1 = (1)(2)(3), \pi_4(1) = (1)(23)\}.$$

Найдем разложение симметрической группы перестановок S_3 на смежные классы по подгруппе G_1:

Класс	π	$\pi(1)$
$(1)(2)(3)G_1$	$(1)(2)(3), (1)(23)$	1
$(123)G_1$	$(123), (12)(3)$	2
$(132)G_1$	$(132), (13)(2)$	3

Несложно увидеть, что $(S_3 : G_1) = |O_1|$.

Лемма Бернсайда

Теорема 4 (лемма Бернсайда). *Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда число $N(G)$ орбит элементов множества N по группе G равно*

$$N(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda_1(\pi_g),$$

где $\lambda_1(\pi_g)$ — число неподвижных элементов перестановки π_g.

Лемма Бернсайда

Доказательство. Пусть $G = \{g_1 = e, g_2, \ldots, g_m\}$.
Построим таблицу $T = (t_{ij})$, в которой

$t_{ij} = 1$, если $\pi_{g_j}(i) = i$;

$t_{ij} = 0$, иначе.

$$T: \quad \begin{array}{c|cccc|c}
N \setminus G & \pi_{g_1} = e & \pi_{g_2} & \ldots & \pi_{g_m} & \\
\hline
1 & 1 & & \ldots & & |G_1| \\
2 & 1 & & \ldots & & |G_2| \\
\ldots & & & \ldots & & \ldots \\
n & 1 & & \ldots & & |G_n| \\
\hline
 & \lambda_1(\pi_{g_1}) & \lambda_1(\pi_{g_2}) & \ldots & \lambda_1(\pi_{g_m}) &
\end{array}$$

В таблице T число единиц в каждой строке равно порядку стабилизатора элемента — номера этой строки; число единиц в каждом столбце равно числу неподвижных элементов перестановки с номером этого столбца.

Лемма Бернсайда

Доказательство.
Число единиц в таблице T можно подсчитать
по строкам как $\sum_{i=1}^{n} |G_i|$
и по столбцам как $\sum_{j=1}^{m} \lambda_1(\pi_{g_j})$.
Тогда
$$\sum_{i=1}^{n} |G_i| = \sum_{j=1}^{m} \lambda_1(\pi_{g_j}).$$

Лемма Бернсайда

Доказательство.
По предыдущей теореме $|G_i| = \frac{|G|}{|O_i|}$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} |G_i| = |G| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|O_i|}.$$

Если для элементов $i, k \in N$ верно $i \sim_G k$, то $O_i = O_k$, откуда $|O_i| = |O_k|$. Пусть

$$O_{a_1}, \ldots, O_{a_{N(G)}}$$

все **различные** орбиты по группе G.
Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|O_i|} = \sum_{l=1}^{N(G)} \frac{1}{|O_{a_l}|} \sum_{i:i \sim_G a_l} 1 = \sum_{l=1}^{N(G)} \frac{1}{|O_{a_l}|} \cdot |O_{a_l}| = N(G).$$

Лемма Бернсайда

Доказательство.
Следовательно,

$$|G| \cdot N(G) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_1(\pi_{g_j}).$$

$\square$

Пример: число орбит при вращении треугольника

Пример. Найдем число орбит элементов множества $N = \{1, 2, 3\}$ по тождественному действию группы H вращений правильного треугольника в плоскости. Сколько их?
Напомним, что

$$H = \{\pi_1 = e = (1)(2)(3), \pi_2 = (123), \pi_3 = (132)\}.$$

Тогда

$$\lambda_1(\pi_1) = 3, \lambda_1(\pi_2) = \lambda_1(\pi_3) = 0.$$

Значит,

$$N(H) = \frac{1}{|H|}\sum_{j=1}^{3}\lambda_1(\pi_j) = \frac{1}{3}(3+0+0) = 1.$$

Все элементы множества N из одной орбиты, т.е. перестановками группы H каждый элемент множества N можно перевести в любой другой элемент этого множества.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти группу перестановок вершин правильного шестиугольника при его вращениях в плоскости. Найти все подгруппы этой группы. Найти орбиту вершины 1 при тождественном действии в группе и в каждой из подгрупп. По лемме Бернсайда подсчитать число орбит вершин по каждой из подгрупп.

2. По лемме Бернсайда подсчитать число орбит вершин правильного восьмиугольника при его вращениях в плоскости на угол, кратный $\frac{\pi}{2}$.

Литература к лекции

1. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 53–57.

Конец лекции