Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 32

Логика ветвящегося реального времени (TCTL)

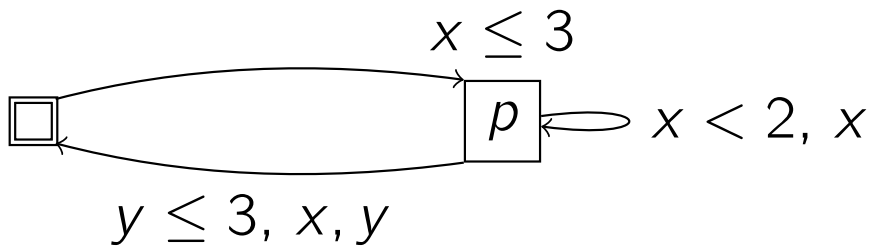
Задача model checking для TCTL

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Напоминание

Временной автомат над множеством часов $\{x, y\}$ и множеством атомарных высказываний $\{p\}$:



Дивергентное вычисление (*для порядка часов* (x, y)):

$$(\boxdot, 0, 0) \mapsto (\boxdot, 1, 1) \mapsto (\boxdot, 2, 2) \mapsto \ldots \mapsto (\boxdot, n, n) \mapsto \ldots$$

Вычисление Зенона (конвергентное и с бесконечным числом $\hookrightarrow$):

$$(\boxdot, 0, 0) \mapsto (\boxdot, 1.2, 1.2) \hookrightarrow (\square, 1.2, 1.2) \hookrightarrow (\boxdot, 0, 0) \mapsto (\boxdot, 1.2, 1.2) \hookrightarrow \ldots$$

Тупиковое конвергентное вычисление:

$$(\boxdot, 0, 0) \hookrightarrow (\square, 0, 0) \mapsto (\square, 1, 1) \mapsto (\square, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \hookrightarrow (\square, 0, \sqrt{2}) \mapsto (\square, 3, \sqrt{2} + 3)$$

Автомат корректен, если не имеет зеноновских вычислений и любая его начальная трасса может быть продолжена до дивергентной

TCTL: синтаксис

Логика ветвящегося реального времени (Timed CTL; TCTL) — это аналог CTL, предназначенный для записи требований, предъявляемых к СРВ

Будем использовать такой краткий синтаксис tctl-формул над конечными множествами часов $\mathcal{C}$ и атомарных высказываний AP:

$$\Phi \quad ::= \quad \mathbb{t} \mid p \mid ag \mid (\Phi \,\&\, \Phi) \mid (\neg\Phi) \mid (\mathbf{A}\varphi) \mid (\mathbf{E}\varphi),$$
$$\varphi \quad ::= \quad (\Phi \mathbf{U} \Phi),$$

где Φ — формула состояния (она же tctl-формула), φ — формула пути, $p \in \mathrm{AP}$ и $ag \in AC(\mathcal{C})$

Отличия от синтаксиса ctl-формул:

1. Наряду с атомарными высказываниями (p) можно записывать и атомарные временны́е ограничения (ag)
2. В синтаксисе нет оператора **X**, так как для реального времени понятие «следующий момент времени» бессмысленно

TCTL: семантика

Содержательная трактовка кванторов пути (**A**, **E**) и темпорального оператора (**U**) — это их трактовка в CTL, адаптированная к особенностям поведения СРВ:

- **E**φ: существует **дивергентная** трасса, для которой верно Φ
- **A**φ: для любой **дивергентной** трассы верно Φ
- Φ**U**Ψ: в **реальном** будущем станет верным Ψ, а до тех пор будет верно Φ

Чтобы адекватно учесть реальное время в операторе **U**, следует «реально» переосмыслить дискретные (пошаговые) трассы автоматов

TCTL: семантика

Например, трассу

$$(\ell, 0) \mapsto (\ell, 1) \hookrightarrow (r, 0)$$

следует понимать так:

- Автомат начинает выполнение в состоянии ℓ со значением часов 0
- Затем автомат ожидает единицу времени, и во время ожидания значение часов непрерывно возрастает от 0 до 1, проходя через все значения интервала $[0, 1]$
- После этого автомат мгновенно переходит в состояние r, и одовременно с этим значение часов сбрасывается

Таким образом, между конфигурациями $(\ell, 0)$ и $(\ell, 1)$ в этой трассе *неявно подразумевается* континуум промежуточных конфигураций для всех значений часов интервала $(0, 1)$

TCTL: семантика

Будем говорить, что конфигурация σ

- покрывается парой конфигураций σ_1, σ_2, если верно хотя бы одно из двух:
  - $\sigma = \sigma_2$
  - $\sigma_1 \overset{d}{\mapsto} \sigma_2$ и $\sigma_1 \overset{d'}{\longmapsto} \sigma$, где $d' \in (0, d)$
- покрывается k-м шагом трассы
$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots,$$
где $k \geq 1$, если она порождается парой σ_k, σ_{k+1}
- покрывается 0-м шагом трассы
$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots,$$
если $\sigma = \sigma_1$
- покрывается трассой, если она покрывается каком-либо шагом этой трассы

TCTL: семантика

Как и для CTL, для TCTL задаются два вида выполнимости:

- Выполнимость tctl-формулы Φ в конфигурации σ автомата $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}, \sigma \models \Phi$
- Выполнимость формулы пути φ на дивергентной трассе τ автомата $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}, \tau \models \varphi$

Эти отношения для автомата $\mathcal{A} = (S, s_0, \mathcal{I}, T, L)$ и формул над атомарными высказываниями AP и часами $\mathcal{C}$ задаются так:

- Всегда верно $\mathcal{A}, \sigma \models \mathtt{t}$
- $\mathcal{A}, (s, \nu) \models p$, где $p \in \mathrm{AP} \quad \Leftrightarrow \quad p \in L(s)$
- $\mathcal{A}, (s, \nu) \models ag$, где $ag \in AC(\mathcal{C}) \quad \Leftrightarrow \quad \nu \models ag$
- $\mathcal{A}, \sigma \models \Phi_1 \,\&\, \Phi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}, \sigma \models \Phi_1$ и $\mathcal{A}, \sigma \models \Phi_2$
- $\mathcal{A}, \sigma \models \neg\Phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}, \sigma \not\models \Phi$

TCTL: семантика

Как и для CTL, для TCTL задаются два вида выполнимости:

- Выполнимость tctl-формулы Φ в конфигурации σ автомата $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}, \sigma \models \Phi$
- Выполнимость формулы пути φ на дивергентной трассе τ автомата $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}, \tau \models \varphi$

Эти отношения для автомата $\mathcal{A} = (S, s_0, \mathcal{I}, T, L)$ и формул над атомарными высказываниями AP и часами $\mathcal{C}$ задаются так:

- $\mathcal{A}, \sigma \models \mathbf{A}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ для любой дивергентной σ-трассы τ автомата $\mathcal{A}$ верно $\mathcal{A}, \tau \models \varphi$
- $\mathcal{A}, \sigma \models \mathbf{E}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует дивергентная σ-трасса τ автомата $\mathcal{A}$, такая что верно $\mathcal{A}, \tau \models \varphi$

TCTL: семантика

Как и для CTL, для TCTL задаются два вида выполнимости:

- Выполнимость tctl-формулы Φ в конфигурации σ автомата $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}, \sigma \models \Phi$
- Выполнимость формулы пути φ на дивергентной трассе τ автомата $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}, \tau \models \varphi$

Эти отношения для автомата $\mathcal{A} = (S, s_0, \mathcal{I}, T, L)$ и формул над атомарными высказываниями AP и часами $\mathcal{C}$ задаются так:

- $\mathcal{A}, \tau \models \Phi \mathbf{U} \Psi$, где $\tau = (\sigma_1 \to \sigma_2 \to \dots)$ $\Leftrightarrow$ существуют номер k, $k \in \mathbb{N}_0$, и конфигурация σ, покрываемая k-м шагом трассы τ, такие что
  - $\mathcal{A}, \sigma \models \Psi$
  - Если $k > 0$, то для любой конфигурации σ', покрываемой трассой
    $$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \dots \to \sigma_k - 1 \to \sigma,$$
    верно $\mathcal{A}, \sigma' \models \Phi \vee \Psi$

Tctl-формула φ выполняется на автомате $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \models \varphi$), если она выполняется в начальной конфигурации этого автомата

TCTL: семантика, особенность U

«Если $k > 0$, то для любой конфигурации σ' ... верно $\mathcal{A}, \sigma' \models \Phi \vee \Psi$»

В CTL в соответствующем месте семантики **U** вместо $\Phi \vee \Psi$ записывалось просто Φ

В содержательной трактовке **U** в TCTL говорится «а до тех пор верно Φ» (не $\Phi \vee \Psi$)

Можно легко убедиться в том, что семантика **U** в CTL не изменится, если в соответствующем месте написать «$\Phi \vee \Psi$» вместо «Φ»

При этом для реального времени различие существенно, и в этом можно убедиться на таком примере

TCTL: семантика, особенность U

«Если $k > 0$, то для любой конфигурации σ' ... верно $\mathcal{A}, \sigma' \models \Phi \vee \Psi$»

Пример автомата $\mathcal{A}$ и tctl-формулы φ:

$$\mathbf{A}((x \leq 1)\mathbf{U}(x > 1))$$

Все дивергентные вычисления этого автомата имеют вид

$$(\square, 0) \mapsto (\square, d_1) \mapsto (\square, d_2) \mapsto \dots$$

для неограниченно возрастающей последовательности чисел $d_1, d_2, \dots$

Содержательное прочтение формулы: «в любом вычислении автомата становится верным $x > 1$, и до тех пор верно $x \leq 1$»

Согласно прочтению формулы и согласно семантике **U**, верно $\mathcal{A} \models \varphi$

Если в семантике **U** записать «Φ» вместо «$\Phi \vee \Psi$», то формула не будет выполняться на $\mathcal{A}$:

- «становится верным $x > 1$»: выберем какую-либо конфигурацию со значением d часов x, где $d > 1$
- этой конфигурации в вычислении предшествуют покрытые конфигурации со значениями x из $(1, d)$, и для этих значений не выполняется неравенство $x \leq 1$

TCTL

В полном синтаксисе tctl-формул встречаются и другие привычные логические связки и темпоральные операторы:

- $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \,\&\, \neg\psi)$
- $\varphi \to \psi = \neg\varphi \vee \psi$
- $\mathbf{F}\varphi = \mathbb{t}\mathbf{U}\varphi$
- $\mathbf{AG}\varphi = \neg\mathbf{EF}\neg\varphi$
- $\mathbf{EG}\varphi = \neg\mathbf{AF}\neg\varphi$

Содержательная трактовка операторов **F** и **G** тоже привычна с поправкой на реальное время:

- $\mathbf{F}\varphi$: в **реальном** будущем рано или поздно станет верным φ
- $\mathbf{G}\varphi$: всегда в **реальном** будущем будет верно φ

TCTL

Примеры tctl-формул напоследок:

- Как бы ни работал компьютер (*в реальном времени*), если он включен, то есть возможность его выключить

$$\mathbf{AG}(on \to \mathbf{EF}\neg on)$$

- Задача не может выполняться больше минуты (x — *часы, в которых отмеряется реальное время выполнения задачи в минутах*)

$$\mathbf{AG}(executing \to (x \leq 1))$$

- Если послан запрос, то неотвратимо не более чем за 5 минут на него будет получен отклик (x — *часы, в которых отмеряется реальное время с отсылки запроса в минутах*)

$$\mathbf{AG}(request \to \mathbf{AF}(response \,\&\, (x \leq 5)))$$

- Существует вычисление СРВ, в котором действия, выполнение которых сопровождается сбросом часов x, выполняются не реже чем раз в 5 *единиц времени*

$$\mathbf{EG}(x \leq 5)$$

Задача model checking для TCTL (MC-TCTL)

Для заданного корректного временно́го автомата $\mathcal{A}$
и заданной tctl-формулы Φ
над теми же множествами атомарных высказываний и часов
проверить справедливость соотношения

$$\mathcal{A} \models \Phi$$